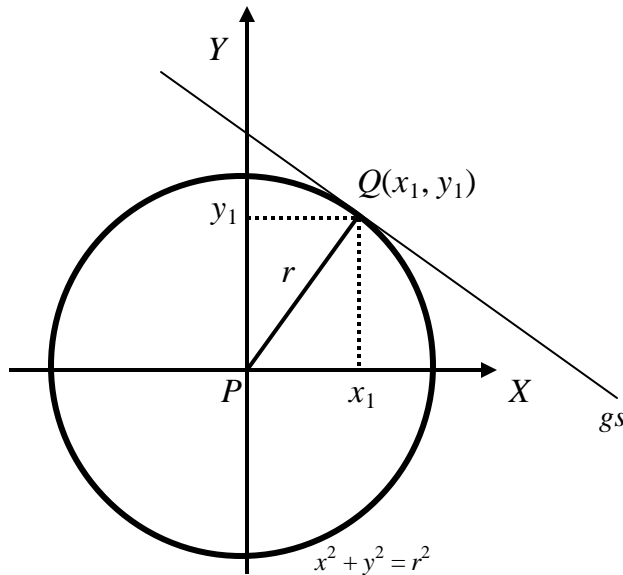


# Persamaan Garis Singgung Lingkaran

## PGS Lingkaran Melalui Satu Titik pada Lingkaran



Dari gambar,  $m_{PQ} = \frac{y_1}{x_1}$

PQ tegak lurus gs, maka

$$m_{PQ} m_{gs} = -1 \Rightarrow m_{gs} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Persamaan garis singgung melalui  $Q(x_1, y_1)$  adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

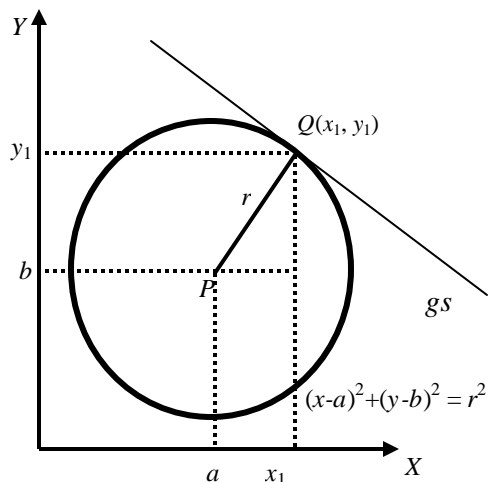
$$y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1)$$

$$y_1y - y_1^2 = -x_1x + x_1^2$$

$$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$$

Karena  $Q(x_1, y_1)$  pada lingkaran, maka  $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ , sehingga PGS:

$$x_1x + y_1y = r^2$$



Dari gambar,  $m_{PQ} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$

PQ tegak lurus gs, maka

$$m_{PQ} m_{gs} = -1 \Rightarrow m_{gs} = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$$

Persamaan garis singgung melalui  $Q(x_1, y_1)$  adalah:

$$(y - b) - (y_1 - b) = m((x - a) - (x_1 - a))$$

$$(y - b) - (y_1 - b) = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}((x - a) - (x_1 - a))$$

$$(y_1 - b)(y - b) - (y_1 - b)^2 = -(x_1 - a)(x - a) + (x_1 - a)^2$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$$

Karena  $Q(x_1, y_1)$  pada lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ , maka  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ , sehingga PGS:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  di titik  $(x_1, y_1)$  adalah

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

$$x_1x - ax_1 - ax + a^2 + y_1y - by_1 - by + b^2 - r^2 = 0$$

$$x_1x + y_1y - a(x + x_1) - b(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Dimana,

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad a^2 + b^2 - r^2 = C$$

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

### PGS Lingkaran dengan Gradien $m$ Diketahui

Misal PGS  $y = mx + c$  dan pers. lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$

Substitusi  $y$  ke persamaan lingkaran

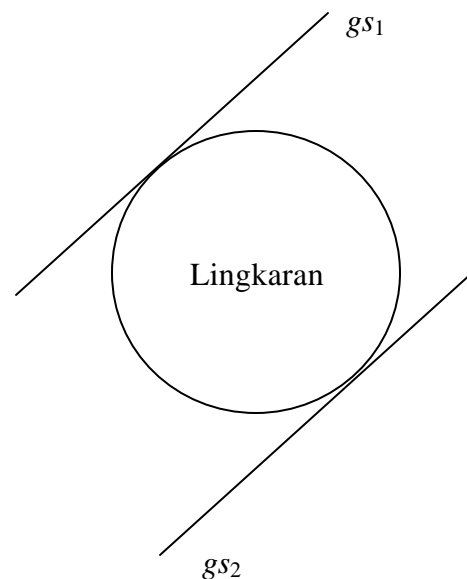
$$\begin{aligned} x^2 + (mx + c)^2 &= r^2 \Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0 \\ &\Rightarrow (1 + m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - r^2) = 0 \end{aligned}$$

Garis menyinggung lingkaran jika  $D = b^2 - 4ac = 0$

$$\begin{aligned} (2mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - r^2) &= 0 \\ \Rightarrow 4m^2c^2 - 4c^2 - 4m^2c^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 &= 0 \\ \Rightarrow -c^2 + r^2 + m^2r^2 &= 0 \\ \Rightarrow c^2 &= r^2 + m^2r^2 \\ \Rightarrow c^2 &= r^2(1 + m^2) \\ \Rightarrow c &= \pm r\sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

Maka PGS Lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  dengan gradien  $m$  adalah

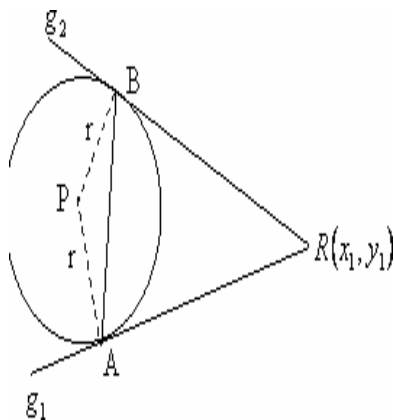
$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ &= mx \pm r\sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$



Dengan cara yang sama, untuk Lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  akan diperoleh PGS:

$$\begin{aligned} y - b &= m(x - a) + c \\ &= m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

## PGS Lingkaran Melalui Satu Titik di Luar Lingkaran



### Catatan:

Untuk PGS lingkaran melalui titik di luar lingkaran, tidak ada rumus khusus yang digunakan. Bisa memilih sesuai dengan selera.

### Cara 1: Mencari Persamaan Garis Polar

Misal  $A(x_A, y_A)$  maka PGS di A adalah  $x_A x + y_A y = r^2$  .....(1)

$B(x_B, y_B)$  maka PGS di B adalah  $x_B x + y_B y = r^2$  .....(2)

Sehingga persamaan garis

AR adalah  $x_A x_1 + y_A y_1 = r^2$  .....(3)

BR adalah  $x_B x_1 + y_B y_1 = r^2$  .....(4)

Kurangkan (3) dengan (4) diperoleh

$$(x_A - x_B)x_1 + (y_A - y_B)y_1 = 0$$

$$(y_A - y_B)/(x_A - x_B) = -x_1/y_1$$

Gradien garis AB adalah  $(y_A - y_B)/(x_A - x_B) = -x_1/y_1$  dan garis AB melalui titik A maka persamaan garis AB adalah

$$y - y_A = -x_1/y_1 (x - x_A) \rightarrow y_1 y - y_A y_1 = -x_1 x + x_A x_1$$

$$\rightarrow x_1 x + y_1 y = x_A x_1 + y_A y_1$$

$$\rightarrow x_1 x + y_1 y = r^2$$

Jadi Persamaan garis polar AB pada lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  adalah  $x_1 x + y_1 y = r^2$

Dengan cara yang sama, untuk lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  mempunyai PG polar  $(x_1 - a)(x - a)^2 + (y_1 - b)(y - b)^2 = r^2$

### Cara mencari PGS Lingkaran adalah:

1. Substitusi PG polar ke Persamaan Lingkaran, untuk mencari titik A dan B. Sebagai titik singgung lingkaran.
2. Gunakan rumus PGS melalui titik pada lingkaran untuk mencari PGSnya.

### Cara 2: Dengan mencari gradien

Misalkan titik  $(x_1, y_1)$  di luar lingkaran L maka PGS L melalui  $(x_1, y_1)$  adalah

$$y - y_1 = m(x + x_1)$$

$$y = m(x + x_1) + y_1$$

### Cara:

1. Substitusi y ke L, akan diperoleh suatu persamaan kuadrat.
2. Mencari nilai  $D = b^2 - 4ac$  Syarat garis menyinggung adalah  $D = 0$
3. Diperoleh nilai gradien m
4. Substitusi m ke persamaan y di atas.