

Persamaan Garis Singgung



Disusun Oleh:
Anang Wibowo, S.Pd



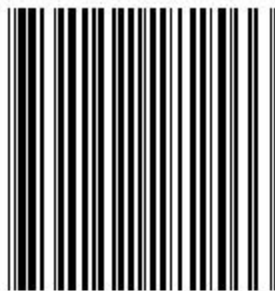
www.matikzone.wordpress.com

April 2012

Download juga Galeri Soal Lingkaran, 71 soal beserta penyelesaiannya dan 235 soal latihan.
Gratis tanpa mbayar... Hanya di www.matikzone.co.cc



www.matikzone.co.cc



085815818151

Persamaan Garis Singgung LINGKARAN

Email : matikzone@gmail.com

Blog : www.matikzone.co.cc – www.matikzone.wordpress.com

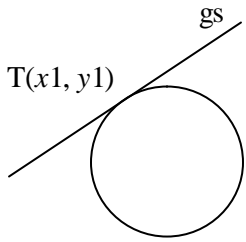
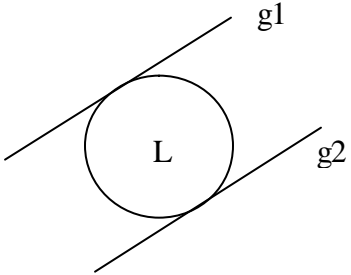
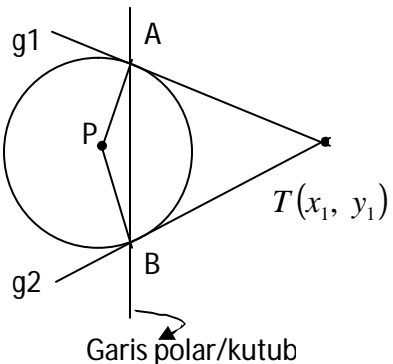
HP : 08 581 581 81 51 (SMS only)

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang. Dilarang mengkutip sebagian atau seluruh isi galeri ini tanpa mendo'akan kebaikan untuk kami dan umat islam seluruhnya. Dan jangan lupa mencantumkan sumbernya ya...

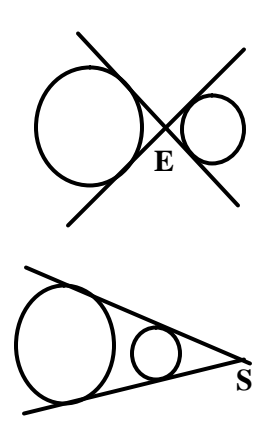
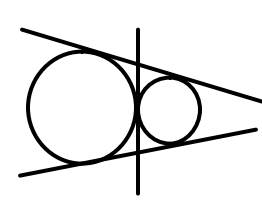
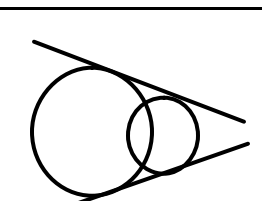
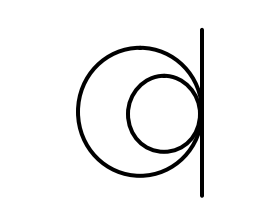
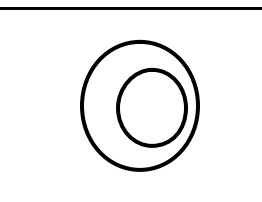
Persamaan Garis Singgung L ingkaran



Persamaan Garis Singgung Sebuah Lingkaran (PGSL)

No.	Bahasan	Persamaan Garis Singgung
1.	PGSL melalui titik PADA lingkaran 	$L: x^2 + y^2 = r^2$ $PGSL: x_1x + y_1y = r^2$
		$L: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $PGSL: (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
		$L: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ $PGSL: x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$
2.	PGSL dengan gradien m diketahui 	$L: x^2 + y^2 = r^2$ $PGSL: y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$
		$L: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $PGSL: y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$
		$L: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ $PGSL:$ $y + \frac{1}{2}B = m\left(x + \frac{1}{2}A\right) \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C} \cdot \sqrt{1 + m^2}$
3.	PGSL melalui sebuah titik di LUAR lingkaran 	Dengan mencari persamaan garis polar/kutub (PGP). Langkah2: ✓ Tentukan PGP, dengan rumus seperti rumus PGSL melalui titik pada lingkaran. ✓ Tentukan titik singgung A dan B (substitusi PGP dalam $y = mx + c$ ke persamaan lingkaran). ✓ Tentukan PGSL menggunakan PGSL melalui titik pada lingkaran.
		Dengan mencari gradien PGSL, kemudian gunakan rumus persamaan garis jika diketahui gradien dan titik yang dilaluinya. Setidaknya ada 5 cara yang bisa kita pakai, meski dalam soal tertentu akan mengalami masalah di tengah jalan. Lihat contoh soal.

Persamaan Garis Singgung Persekutuan 2 Lingkaran (PGSP)

No	Keadaan 2 Lingkaran	Banyak PGSP		Cara menentukan PGSP	
		Dalam	Luar	Dalam	Luar
1	 <p>Saling Asing Luar</p>	2	2	<p>Menentukan titik potong kedua Garis Singgung kemudian mencari PGS melalui titik di luar lingkaran. Titik potong:</p> $E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right)$ <p>Dengan:</p> <p>L1: Pusat P, jari-jari R L2: Pusat Q, jari-jari r</p> <p>(contoh soal no 8)</p>	<p>Menentukan titik potong kedua Garis Singgung kemudian mencari PGS melalui titik di luar lingkaran. Titik potong:</p> $S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R-r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R-r}\right)$ <p>(contoh soal no 9)</p> <p>Jika jari-jari lingkaran sama mk $mgs = mPQ$</p> <p>(contoh soal no 10)</p>
2	 <p>Bersinggungan Luar</p>	1	2	<p>Cara 1: $PGS \equiv L_1 - L_2 = 0$</p> <p>Cara 2: Menentukan titik singgung, kemudian gunakan PGS melalui titik pada lingkaran.</p> <p>(contoh soal no 11)</p>	-- Sda --
3	 <p>Berpotongan</p>	0	2	-	-- Sda --
4	 <p>Bersinggungan Dalam</p>	0	1	-	<p>Cara 1: $PGS \equiv L_1 - L_2 = 0$</p> <p>Cara 2: Menentukan titik singgung, kemudian gunakan PGS melalui titik pada lingkaran.</p>
5	 <p>Saling Asing Dalam</p>	0	0	-	-

Soal-Soal:

1. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ di titik T(2, -3).

Jawab:

Persamaan garis singgung di titik (2, -3) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ adalah:

$$2x + (-3)y = 13 \Rightarrow 2x - 3y - 13 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya $2x - 3y - 13 = 0$

2. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$ di titik T(1, -2).

Jawab:

Titik (1, -2) pada lingkaran $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$ karena $(1-1)^2 + (-2-3)^2 = 0 + 25 = 25$

Persamaan garis singgung di titik (1, -2) pada lingkaran $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$ adalah:

$$\begin{aligned}(1-1)(x-1) + (-2-3)(y-3) &= 25 \\ -5y + 15 &= 25 \\ y &= -2\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgungnya $y = -2$

3. Tentukan persamaan garis singgung di titik (4, -1) pada lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$.

Jawab:

Titik (4, -1) pada lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$ karena

$$4^2 + (-1)^2 + 6 \cdot 4 - 4(-1) - 45 = 16 + 1 + 24 + 4 - 45 = 45 - 45 = 0$$

Persamaan garis singgung di titik (4, -1) pada lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$ adalah:

$$\begin{aligned}4x + (-1)y + \frac{6}{2}(4+x) + \frac{-4}{2}(-1+y) - 45 &= 0 \\ 4x - y + 12 + 3x + 2 - 2y - 45 &= 0\end{aligned}$$

$$7x - 3y - 31 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya $7x - 3y - 31 = 0$

4. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ dengan gradien 2.

Jawab:

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ dengan gradien $m = 2$ adalah:

$$\begin{aligned}y &= 2x \pm 5\sqrt{1+2^2} \\ &= 2x \pm 5\sqrt{5}\end{aligned}$$

Diperoleh 2 persamaan garis singgung, yaitu: $y = 2x + 5\sqrt{5}$ dan $y = 2x - 5\sqrt{5}$

5. Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus garis $x + 2y - 4 = 0$ pada lingkaran $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Jawab:

Persamaan garis singgung lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dengan gradien m adalah:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Cara 1:

Misalkan gradient garis singgung adalah m_1 dan gradient garis $x + 2y - 4 = 0$ adalah m_2 .

$$\text{Garis } x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 \quad \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$$

Garis dengan gradien m_1 dan tegak lurus dengan $x + 2y - 4 = 0$ mempunyai hubungan:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_1 \cdot -\frac{1}{2} = -1$$

$$m_1 = 2$$

Jadi persamaan garis singgung:

$$\begin{aligned} y - b &= m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow y - 2 = 2(x - 4) \pm \sqrt{5}\sqrt{1 + 2^2} \\ &\Rightarrow y - 2 = 2x - 8 \pm \sqrt{5}\sqrt{5} \\ &\Rightarrow y = 2x - 6 \pm 5 \end{aligned}$$

Diperoleh 2 persamaan garis singgung, yaitu: $y = 2x - 1$ dan $y = 2x - 11$

6. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 21 = 0$ yang sejajar dengan garis $-6x + 2y - 17 = 0$.

Jawab:

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan gradien m adalah:

$$y + \frac{1}{2}B = m\left(x + \frac{1}{2}A\right) \pm r\sqrt{1 + m^2} \quad \text{atau} \quad y + \frac{1}{2}B = m\left(x + \frac{1}{2}A\right) \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C} \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

Misalkan gradient garis singgung adalah m_1 dan gradient garis $-6x + 2y - 17 = 0$ adalah m_2 .

$$\text{Garis } -6x + 2y - 17 = 0 \Rightarrow y = 3x + \frac{17}{2} \quad \Rightarrow m_2 = 3$$

Garis dengan gradien m_1 dan sejajar dengan $-6x + 2y - 17 = 0$ mempunyai hubungan:

$$m_1 = m_2 = 3$$

Jadi persamaan garis singgung:

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{2}B &= m\left(x + \frac{1}{2}A\right) \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C} \cdot \sqrt{1 + m^2} \Rightarrow y + 5 = 3(x + 2) \pm \sqrt{4 + 25 - 21}\sqrt{1 + 3^2} \\ &\Rightarrow y = -5 + 3x + 6 \pm \sqrt{8} \cdot \sqrt{10} \\ &\Rightarrow y = 3x + 1 \pm 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan garis singgung $y = 3x + 1 \pm 4\sqrt{5}$

7. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ yang melalui titik T(3, 2).

Jawab:

Cara 1:

Persamaan garis polar lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ yang melalui titik T(3, 2) adalah

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Substitusi ke persamaan lingkaran

$$x^2 + \left(-\frac{3}{2}x + 2\right)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4}x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{13}{4}x - 6\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ atau } x = \frac{24}{13}$$

Substitusi nilai x yang diperoleh ke persamaan garis (bukan ke persamaan lingkaran):

$$\text{Untuk } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow T_1(0, 2)$$

$$\text{Untuk } x = \frac{24}{13} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{13} + 2 = -\frac{36}{13} + \frac{26}{13} = -\frac{10}{13} \Rightarrow T_2\left(\frac{24}{13}, -\frac{10}{13}\right)$$

Titik-titik tersebut adalah titik singgung lingkaran, gunakan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik PADA lingkaran.

PGS 1:

$$0x + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 4 \\ \Rightarrow y = 2$$

PGS 2:

$$\frac{24}{13}x - \frac{10}{13}y = 4 \Rightarrow 24x - 10y = 52 \\ \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya $y = 2$ dan $12x - 5y - 26 = 0$

Cara 2:

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

Persamaan garis dengan gradien m melalui T(3, 2) adalah $y - 2 = m(x - 3)$ atau $y = m(x - 3) + 2$

Maka

$$m(x - 3) + 2 = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$mx - 3m + 2 = mx \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

$$-3m + 2 = \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

$$9m^2 - 12m + 4 = 4(1+m^2)$$

$$9m^2 - 12m + 4 = 4 + 4m^2$$

$$5m^2 - 12m = 0$$

$$m(5m - 12) = 0$$

$$m = 0 \text{ atau } m = \frac{12}{5}$$

Substitusi m yang diperoleh ke persamaan garis $y = m(x - 3) + 2$ (bukan ke $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$):

$$\text{Untuk } m = 0 \Rightarrow y = 0(x - 3) + 2 = 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Untuk } m = \frac{12}{5} \Rightarrow y = \frac{12}{5}(x - 3) + 2 \Rightarrow y = \frac{12}{5}x - \frac{26}{5} \quad \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya $y = 2$ dan $12x - 5y - 26 = 0$

Cara 3:

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ melalui titik T(3, 2) maka:

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow 2 = 3m \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow 2 - 3m = \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow 4 - 12m + 9m^2 = 4 + 4m^2$$

$$\Rightarrow 5m^2 - 12m = 0$$

$$\Rightarrow m(5m - 12) = 0$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ atau } m = \frac{12}{5}$$

Persamaan garis dengan gradien m melalui T(3, 2) adalah $y - 2 = m(x - 3)$ atau $y = m(x - 3) + 2$

Substitusi m yang diperoleh ke persamaan y

$$\text{Untuk } m = 0 \Rightarrow y = 0(x - 3) + 2 = 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Untuk } m = \frac{12}{5} \Rightarrow y = \frac{12}{5}(x - 3) + 2 \Rightarrow y = \frac{12}{5}x - \frac{26}{5} \quad \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$$

Jadi persamaan garis singgungnya $y = 2$ dan $12x - 5y - 26 = 0$

Cara 4:

Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat (a, b) , jari-jari r dan melalui titik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan:

$$m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm r\sqrt{(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}$$

Lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ mempunyai pusat P(0, 0) dan berjari-jari 2 melalui titik T(3, 2) mempunyai PGSL $y - 2 = m(x - 3)$, dengan:

$$m = \frac{(2 - 0)(3 - 0) \pm 2\sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 0)^2 - 2^2}}{(3 - 0)^2 - 2^2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{9}}{9 - 4} = \frac{6 \pm 6}{5}$$

Jadi persamaan garis singgungnya $y - 2 = \frac{6 \pm 6}{5}(x - 3)$, yaitu

$$y - 2 = 0 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 2 \text{ dan } y - 2 = \frac{12}{5}(x - 3) \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$$

Cara 5:

Misalkan persamaan garis singgung yang melalui T(3, 2) adalah

$$y - 2 = m(x - 3) \Rightarrow y = 2 + m(x - 3)$$

Substitusi y ke dalam persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned} x^2 + (2 + m(x - 3))^2 &= 4 \Rightarrow x^2 + 4 + 4m(x - 3) + m^2(x^2 - 6x + 9) - 4 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 4 + 4mx - 12m + m^2x^2 - 6m^2x + 9m^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow (1 + m^2)x^2 + (4m - 6m^2)x + (-12m + 9m^2) = 0 \end{aligned}$$

Syarat menyinggung adalah $D = 0$

$$\begin{aligned} D = 0 \Rightarrow (4m - 6m^2)^2 - 4(1 + m^2)(-12m + 9m^2) &= 0 \\ \Rightarrow 16m^2 - 48m^3 + 36m^4 + 48m - 36m^2 + 48m^3 - 36m^4 &= 0 \\ \Rightarrow -20m^2 + 48m &= 0 \\ \Rightarrow -5m^2 + 12m &= 0 \\ \Rightarrow m(-5m + 12) &= 0 \\ \Rightarrow m = 0 \quad \text{atau} \quad m = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Untuk $m = 0 \Rightarrow y = 2 + 0 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 2$

Untuk $m = \frac{12}{5} \Rightarrow y = 2 + \frac{12}{5}(x - 3) \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$

Jadi persamaan garis singgungnya $y = 2$ dan $12x - 5y - 26 = 0$

Cara 6:

Lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ berpusat di P(0, 0) dan berjari-jari $r = 2$

Persamaan garis singgung yang melalui titik T(3, 2) dan bergradien m adalah:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = m(x - 3) \\ &\Rightarrow y = mx + 2 - 3m \\ &\Rightarrow mx - y + (2 - 3m) = 0 \end{aligned}$$

Jari-jari r adalah jarak P(0, 0) dengan garis $mx - y + (2 - 3m) = 0$

$$\begin{aligned} r &= \frac{|m \cdot 0 - 1 \cdot 0 + (2 - 3m)|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|2 - 3m|}{\sqrt{m^2 + 1}} \\ &\Rightarrow 4 = \frac{4 - 12m + 9m^2}{m^2 + 1} \\ &\Rightarrow 4m^2 + 4 = 4 - 12m + 9m^2 \\ &\Rightarrow 5m^2 - 12m = 0 \\ &\Rightarrow m(5m - 12) = 0 \\ &\Rightarrow m = 0 \quad \text{atau} \quad m = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Diperoleh

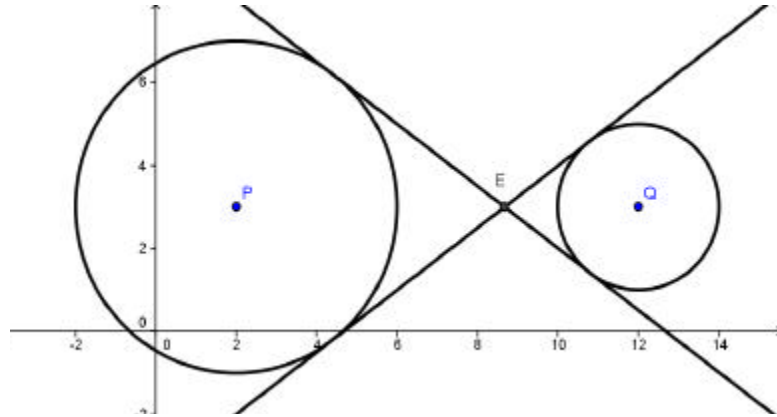
PGS 1: $0 \cdot x - y + (2 - 3 \cdot 0) = 0 \Rightarrow -y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

PGS 2: $\frac{12}{5} \cdot x - y + \left(2 - 3 \cdot \frac{12}{5}\right) = 0 \Rightarrow \frac{12}{5} \cdot x - y + \left(-\frac{26}{5}\right) = 0 \Rightarrow 12x - 5y - 26 = 0$

Catatan: cara 1 adalah yang paling “aman”, karena cara 2, 3, 4, 5 dan 6 kadang akan menemui masalah di tengah jalan. Silakan untuk mencoba soal berikut: Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ yang melalui titik T(5, 4). (lihat pada bagian akhir pembahasan)

8. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan dalam $L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ dan $L_2 \equiv (x-12)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Jawab:



Koordinat titik E adalah $E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right)$

$L_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ mempunyai pusat P(2, 3) dan jari-jari $R = 4$

$L_2 \equiv (x-12)^2 + (y-3)^2 = 4$ mempunyai pusat Q(12, 3) dan jari-jari $r = 2$

Koordinat titik E adalah $E\left(\frac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 2}{4+2}, \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{4+2}\right) = E\left(\frac{52}{6}, \frac{18}{6}\right) = E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m pada L1 adalah:

$$y - y_P = m(x - x_P) \pm r\sqrt{1+m^2} \Rightarrow y - 3 = m(x - 2) \pm 4\sqrt{1+m^2}$$

Garis singgung melalui titik $E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$

$$y - 3 = m(x - 2) \pm 4\sqrt{1+m^2} \Rightarrow 3 - 3 = m\left(\frac{26}{3} - 2\right) \pm 4\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{20}{3}m \pm 4\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow \pm 4\sqrt{1+m^2} = \frac{20}{3}m$$

$$\Rightarrow 16 + 16m^2 = \frac{400m^2}{9}$$

$$\Rightarrow 144 + 144m^2 = 400m^2$$

$$\Rightarrow 256m^2 = 144$$

$$\Rightarrow 16m^2 = 9$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow m = \pm \frac{3}{4}$$

Persamaan garis dengan gradien m dan melalui $E\left(\frac{26}{3}, 3\right)$ adalah: $y - 3 = m\left(x - \frac{26}{3}\right)$

$$\text{Untuk } m = \frac{3}{4} \Rightarrow y - 3 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{3}{4}x - \frac{26}{4}$$

$$\Rightarrow 3x - 4y - 14 = 0$$

$$\text{Untuk } m = -\frac{3}{4} \Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{26}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{4}x + \frac{26}{4}$$

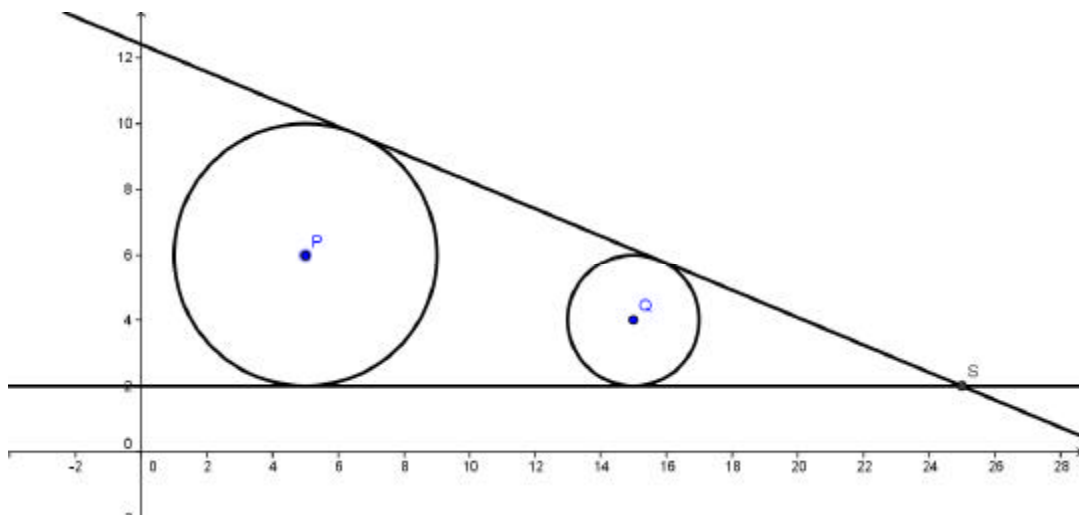
$$\Rightarrow 3x + 4y - 38 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung persekutuan dalam L1 dan L2 adalah:

- $g_1 \equiv 3x - 4y - 14 = 0$
- $g_2 \equiv 3x + 4y - 38 = 0$

9. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan luar lingkaran $L_1 \equiv (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 16$ dan $L_2 \equiv (x - 15)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

Jawab:



Koordinat titik S adalah $S\left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R - r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R - r}\right)$

$L_1 \equiv (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 16$ mempunyai pusat $P(5, 6)$ dan jari-jari $R = 4$

$L_2 \equiv (x - 15)^2 + (y - 4)^2 = 4$ mempunyai pusat $Q(15, 4)$ dan jari-jari $r = 2$

Koordinat titik S adalah $S\left(\frac{4 \cdot 15 - 2 \cdot 5}{4 - 2}, \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 6}{4 - 2}\right) = S\left(\frac{50}{2}, \frac{4}{2}\right) = S(25, 2)$

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m pada L1 adalah:

$$y - y_P = m(x - x_P) \pm r\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow y - 6 = m(x - 5) \pm 4\sqrt{1 + m^2}$$

Garis singgung melalui titik $S(25, 2)$

$$\begin{aligned}
y - 6 = m(x - 5) \pm 4\sqrt{1 + m^2} &\Rightarrow 2 - 6 = m(25 - 5) \pm 4\sqrt{1 + m^2} \\
&\Rightarrow -4 = 20m \pm 4\sqrt{1 + m^2} \\
&\Rightarrow -1 = 5m \pm \sqrt{1 + m^2} \\
&\Rightarrow \pm \sqrt{1 + m^2} = 5m + 1 \\
&\Rightarrow 1 + m^2 = 25m^2 + 10m + 1 \\
&\Rightarrow 24m^2 + 10m = 0 \\
&\Rightarrow m(24m + 10) = 0 \\
&\Rightarrow m = 0 \text{ atau } m = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}
\end{aligned}$$

Persamaan garis dengan gradien m dan melalui $S(25, 2)$ adalah: $y - 2 = m(x - 25)$

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m = 0 &\Rightarrow y - 2 = 0(x - 25) \\
&\Rightarrow y - 2 = 0 \\
&\Rightarrow y = 2
\end{aligned}$$

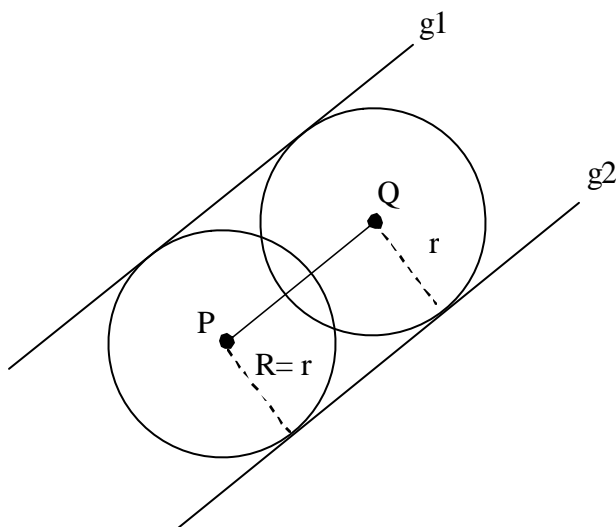
$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m = -\frac{5}{12} &\Rightarrow y - 2 = -\frac{5}{12}(x - 25) \\
&\Rightarrow y - 2 = -\frac{5}{12}x + \frac{125}{12} \\
&\Rightarrow 12y - 24 = -5x + 125 \\
&\Rightarrow 5x + 12y - 149 = 0
\end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgung persekutuan luar L_1 dan L_2 adalah:

$$y = 2 \text{ dan } 5x + 12y - 149 = 0$$

10. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan luar lingkaran $L_1 \equiv (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$ dan $L_2 \equiv \left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 5$.

Jawab:



$L_1 \equiv (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$ mempunyai pusat $P(4, 2)$ dan jari-jari $R = \sqrt{5}$

$L_2 \equiv \left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 5$ mempunyai pusat $Q\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ dan jari-jari $r = \sqrt{5}$

Untuk $R = r$, PQ sejajar kedua garis singgung.

$$m_{gs} = m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 + \frac{6}{5}}{4 - \frac{12}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{16}{8} = 2$$

Garis singgung L1 merupakan garis singgung L2 (garis singgung persekutuan luar)

Persamaan garis singgung L1 dengan gradien 2 adalah:

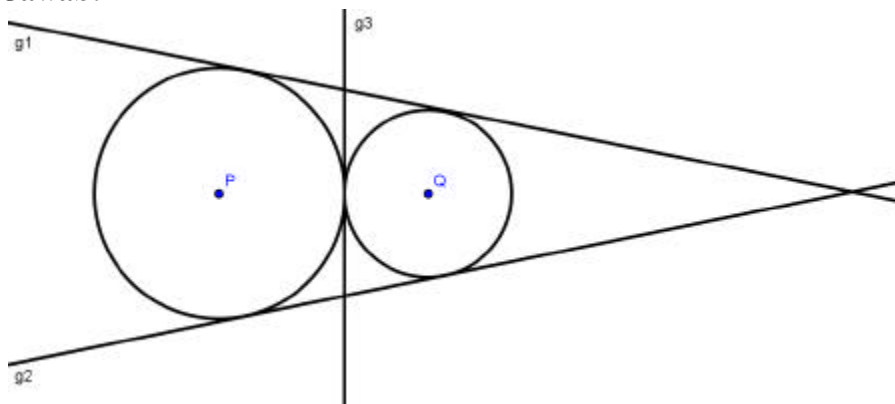
$$\begin{aligned} y - 2 &= 2(x - 4) \pm \sqrt{5} \sqrt{1 + 2^2} \Rightarrow & y &= 2 + 2x - 8 \pm 5 \\ &\Rightarrow & y &= 2x - 6 \pm 5 \\ &\Rightarrow & y &= 2x - 11 \quad \text{atau} \quad y = 2x - 1 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgung persekutuan luar L1 dan L2 adalah:

$$y = 2x - 1 \text{ dan } y = 2x - 11.$$

11. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan antara lingkaran $L_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ dan $L_2 \equiv (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Jawab:



$L_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ mempunyai pusat $P(1, 1)$ dan jari-jari $R = 3$

$L_2 \equiv (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 4$ mempunyai pusat $Q(6, 1)$ dan jari-jari $r = 2$

Terdapat 2 garis singgung persekutuan luar dan 1 garis singgung persekutuan dalam.

Garis singgung persekutuan luar

$$\text{Titik potong kedua garis singgung: } S \left(\frac{Rx_Q - rx_P}{R - r}, \frac{Ry_Q - ry_P}{R - r} \right) = S \left(\frac{18 - 2}{3 - 2}, \frac{3 - 2}{3 - 2} \right) = S(16, 1)$$

Persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m pada L2 adalah:

$$y - y_Q = m(x - x_Q) \pm r \sqrt{1 + m^2} \Rightarrow y - 1 = m(x - 6) \pm 2 \sqrt{1 + m^2}$$

Garis singgung melalui titik $S(16, 1)$

$$\begin{aligned}
y-1 &= m(x-6) \pm 3\sqrt{1+m^2} \Rightarrow & 1-1 &= m(16-6) \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
&\Rightarrow & & 0 = 10m \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
&\Rightarrow & & 10m = \pm 2\sqrt{1+m^2} \\
&\Rightarrow & & 100m^2 = 4m^2 + 4 \\
&\Rightarrow & & 96m^2 = 4 \\
&\Rightarrow & & m^2 = \frac{1}{24} \\
&\Rightarrow & & m = \pm \frac{1}{\sqrt{24}}
\end{aligned}$$

Persamaan garis dengan gradien m dan melalui $S(16, 1)$ adalah: $y-1 = m(x-16)$

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m = \frac{1}{\sqrt{24}} \Rightarrow & y-1 = \frac{1}{\sqrt{24}}(x-16) \\
\Rightarrow & y = \frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 - \frac{16}{\sqrt{24}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Untuk } m = -\frac{1}{\sqrt{24}} \Rightarrow & y-1 = -\frac{1}{\sqrt{24}}(x-16) \\
\Rightarrow & y = -\frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 + \frac{16}{\sqrt{24}}
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi } y = \frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 - \frac{16}{\sqrt{24}} \text{ dan } y = -\frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 + \frac{16}{\sqrt{24}}$$

Garis singgung persekutuan dalam

Cara 1:

$$PGS \equiv L_1 - L_2 = 0$$

$$\begin{array}{r}
(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\
(x-6)^2 + (y-1)^2 = 4 \\
\hline
(x-1)^2 - (x-6)^2 = 5 \\
x^2 - 2x + 1 - x^2 + 12x - 35 = 5 \\
10x = 40 \\
x = 4
\end{array}$$

Cara 2:

$$\text{Titik singgung kedua lingkaran adalah } E\left(\frac{Rx_Q + rx_P}{R+r}, \frac{Ry_Q + ry_P}{R+r}\right) = E\left(\frac{18+2}{3+2}, \frac{3+2}{3+2}\right) = E(4, 1)$$

$E(4, 1)$ adalah titik pada kedua lingkaran, maka persamaan garis singgung dapat ditentukan dengan rumus persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran. Kita cari menggunakan lingkaran pertama.

$$\begin{aligned}
(4-1)(x-1) + (1-1)(y-1) &= 9 \Rightarrow 3(x-1) = 9 \\
\Rightarrow 3x-3 &= 9 \\
\Rightarrow 3x &= 12 \\
\Rightarrow x &= 4
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi persamaan garis singgung persekutuan } L_1 \text{ dan } L_2 \text{ adalah: } y = \frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 - \frac{16}{\sqrt{24}},$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{24}}x + 1 + \frac{16}{\sqrt{24}}, \text{ dan } x = 4$$