

Jumlah Hasil Kali Akar-akar Polinom

Polinom berderajat 2:

Misalkan diketahui $ax^2 + bx + c = 0$ atau $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 ,

maka:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= 0 \Rightarrow x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0\end{aligned}$$

diperoleh $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$

$$\otimes \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ (jumlah akar-akarnya)}$$

$$\otimes \frac{c}{a} = x_1x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} \text{ (hasil kali akar-akarnya)}$$

Polinom berderajat 3:

Misalkan diketahui $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ atau $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$ mempunyai akar-akar x_1, x_2 dan x_3 , maka:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= 0 \Rightarrow (x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)(x - x_3) = 0 \\ &\Rightarrow x^3 - x_1x^2 - x_2x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + x_1x_3x + x_2x_3x - x_1x_2x_3 = 0 \\ &\Rightarrow x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0\end{aligned}$$

diperoleh $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$

$$\otimes \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2 + x_3) \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \text{ (jumlah akar-akarnya)}$$

$$\otimes \frac{c}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$\otimes \frac{d}{a} = -x_1x_2x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \text{ (hasil kali akar-akarnya)}$$

Polinom berderajat 4:

Dengan cara sama, untuk $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ akan kita peroleh:

$$\otimes x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \text{ (jumlah semua akar-akarnya)}$$

$$\otimes x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$\otimes x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$\otimes x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} \text{ (hasil kali semua akar-akarnya)}$$

Secara umum, misalkan persamaan polinom

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

mempunyai akar-akar $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ maka jumlah setiap k akar-akarnya adalah:

$$\frac{(-1)^k \cdot a_{n-k}}{a_n}; k = 1, 2, \dots, n$$

Untuk $k = 1$: disebut “Jumlah semua akar-akarnya”

Untuk $k = n$: disebut “Perkalian semua akar-akarnya”

contoh:

Jika diketahui $2x^8 + 6x^6 - 3x^5 - x^4 + 7x^2 + x - 10 = 0$, tentukan nilai dari:

- Jumlah semua akar-akarnya.
- Jumlah hasil kali setiap 3 akar-akarnya.

Jawab:

$$\text{a). } k = 1 \Rightarrow \text{Jumlah semua akar2nya} = \frac{(-1)^1 a_{8-1}}{a_8} = -\frac{a_7}{a_8} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$\text{b). } k = 3 \Rightarrow \text{JHK 3 akar2nya} = \frac{(-1)^3 a_{8-3}}{a_8} = -\frac{a_5}{a_8} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$