

Rangkuman Materi dan Soal-soal

TURUNAN

Dirangkum Oleh:
Anang Wibowo, S.Pd



matikzone@gmail.com / www.matikzone.co.cc

Rangkuman Materi dan Contoh Soal

TURUNAN

1. Definisi

Turunan dari fungsi $y = f(x)$ adalah $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$ (y' dibaca 'y aksen', dst),

didefinisikan sebagai: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Soal-soal:

a). $y = 6$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6-6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

b). $y = 2x$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+2h-2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2$$

c). $y = 3x^2$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h = 6x + 3 \cdot 0 = 6x \end{aligned}$$

d). $y = x^3$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

e). $y = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x+0} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Rumus Turunan

Untuk n bilangan bulat; a, b, c konstanta; u dan v fungsi dalam variabel x berlaku:

<u>Rumus Turunan</u>	<u>Turunan Fungsi Trigonometri</u>
$y = c \quad \Rightarrow y' = 0$	$y = \sin x \quad \Rightarrow y' = \cos x$
$y = ax^n \quad \Rightarrow y' = anx^{n-1}$	$y = \sin ax \quad \Rightarrow y' = a \cos ax$
<u>Sifat-sifat:</u>	$y = \cos x \quad \Rightarrow y' = -\sin x$
$y = u \pm v \quad \Rightarrow y' = u' \pm v'$	$y = \cos ax \quad \Rightarrow y' = -a \sin ax$
$y = u \cdot v \quad \Rightarrow y' = u'v + uv'$	$y = \tan x \quad \Rightarrow y' = \sec^2 x$
$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \tan ax \quad \Rightarrow y' = a \sec^2 ax$
$y = u^n \quad \Rightarrow y' = nu^{n-1} \cdot u'$	$y = \sin u \quad \Rightarrow y' = u' \cos u$
$y = af(x) \quad \Rightarrow y' = af'(x)$	$y = \cos u \quad \Rightarrow y' = -u' \sin u$
	$y = \tan u \quad \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$

<u>Lainnya:</u>			
$y = a^x \log x, x > 0$	$\Rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot a^x \log e$	$y = a^v$	$\Rightarrow y' = v' \cdot \ln a \cdot a^v$
$y = a^u \log u$	$\Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \cdot a^u \log e$	$y = \ln x$	$\Rightarrow y' = \frac{1}{x}$
$y = e^u$	$\Rightarrow y' = u' e^u$	$y = \ln u$	$\Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

Soal-Soal:

a. $y = 9 \Rightarrow y' = 0$

b. $y = 2x \Rightarrow y' = 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 2x^0 = 2$

c. $y = 3x^4 \Rightarrow y' = 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 12x^3$

d. $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = 3 \cdot x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

e. $y = 5x \cdot \sqrt{x} \Rightarrow y = 5 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 5x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = 5 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{15}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{15\sqrt{x}}{2}$

f. $y = \frac{5}{\sqrt{x}} \Rightarrow y = \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}} = 5x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = 5 \cdot -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{5}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{5}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{5}{2 \cdot \sqrt{x^3}} = -\frac{5}{2 \cdot x \sqrt{x}}$

g. $y = 2x^3 + 6x^2 - x^5 \Rightarrow y' = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 1 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 6x^2 + 12x - 5x^4$

h. $y = (x^3 + 6x^2)(2x - x^5) \Rightarrow y' = u'v + uv' = (3x^2 + 12x)(2x - x^5) + (x^3 + 6x^2)(2 - 5x^4)$
 $= (6x^3 - 3x^7 + 24x^2 - 12x^6) + (2x^3 - 5x^7 + 12x^2 - 30x^6) = -8x^7 - 42x^6 + 8x^3 + 36x^2$

i. $y = \frac{3x + x^3}{5x^2} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(3 + 3x^2)5x^2 - (3x + x^3)10x}{(5x^2)^2} = \frac{15x^2 + 15x^4 - 30x^2 - 10x^4}{25x^4}$
 $= \frac{5x^4 - 15x^2}{25x^4} = \frac{5x^2(x^2 - 3)}{5x^2(5x^2)} = \frac{x^2 - 3}{5x^2}$

j. $y = \sin(4x^2) \Rightarrow y' = 8x \cdot \cos(4x^2)$

k. $y = \cos^3(4x^2 + 2x^3) \Rightarrow y' = 3(\cos^2(4x^2 + 2x^3))(-\sin(4x^2 + 2x^3))(8x + 6x^2)$
 $= -3(8x + 6x^2)\sin(4x^2 + 2x^3)\cos^2(4x^2 + 2x^3)$

l. $y = e^{2x} \Rightarrow y' = 2 \cdot e^{2x}$

m. $y = \ln(x^3 + 2x) \Rightarrow y' = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}$

n. $y = {}^3\log(2x^3 - 6x) \Rightarrow y' = \left(\frac{6x^2 - 6}{2x^3 - 6x}\right)^3 \log e$

3. Aturan Rantai

Jika $y = f(u)$ fungsi dari u yang dapat diturunkan, $u = g(x)$ fungsi dari x yang dapat diturunkan, serta $y = f(g(x))$ fungsi dari x yang dapat diturunkan, maka

$$y' = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Soal-soal:

a. $y = (2x^2 + 5x)^3 \Rightarrow$ misal $u = 2x^2 + 5x$ maka $y = u^3$ sehingga diperoleh $\frac{dy}{du} = 3u^2$ dan

$$\frac{du}{dx} = 4x + 5. \text{ Kita dapatkan } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot (4x + 5) = 3(2x^2 + 5x)^2 (4x + 5)$$

b. $y = \sin^4(2x^2 + 5x) \Rightarrow$ misal $u = \sin(2x^2 + 5x) \Rightarrow y = u^4$, dan $v = 2x^2 + 5x \Rightarrow u = \sin v$.
 Kita peroleh $\frac{dy}{du} = 4u^3$, $\frac{du}{dv} = \cos v$, dan $\frac{dv}{dx} = 4x + 5$. Akhirnya kita peroleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 4u^3 \cdot \cos v \cdot (4x + 5) = 4(\sin(2x^2 + 5x))^3 \cdot \cos(2x^2 + 5x) \cdot (4x + 5)$$

$$= 4(4x + 5)\sin^3(2x^2 + 5x)\cos(2x^2 + 5x)$$

4. Persamaan Garis Singgung Kurva

Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah $m_{gs} = f'(x_1)$. Maka persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah:

$$y - y_1 = m_{gs}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Soal-soal:

a. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = 5x^2 - 3x$ di titik $(2, 14)$.

Jawab: $f'(x) = 10x - 3$ maka $f'(2) = 10 \cdot 2 - 3 = 20 - 3 = 17$ jadi $m_{gs} = f'(2) = 17$.

Persamaan garis singgung kurva adalah $y - y_1 = m_{gs}(x - x_1) \Rightarrow y - 14 = 17(x - 2)$

$$\Rightarrow y - 14 = 17x - 34$$

$$\Rightarrow y = 17x - 34 + 14$$

$$\Rightarrow y = 17x - 20$$

b. Tentukan koordinat titik singgung dari garis singgung kurva $y = f(x) = 3x^2 - 3x + 1$ yang bergradien 15.

Jawab: * $f(x) = 3x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3$

* $m_{gs} = f'(x_1) \Rightarrow 15 = 6 \cdot x_1 - 3 \Rightarrow 6x_1 = 15 + 3 \Rightarrow 6x_1 = 18 \Rightarrow x_1 = 3$

* $y_1 = f(x_1) = 3(3)^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 27 - 9 + 1 = 19$

Jadi, titik singgungnya $T(3, 19)$

c. Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 2x - 3$ yang sejajar garis $y = -2x + 5$

Jawab: * Garis $y = -2x + 5$ memiliki gradien $m = -2$, karena sejajar $m_{gs} = m = -2$

* $f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$

* $m_{gs} = f'(x_1) \Rightarrow -2 = 2x_1 + 2 \Rightarrow 2x_1 = -4 \Rightarrow x_1 = -2$

* $y_1 = f(x_1) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$

* Titik singgungnya $T(-2, -3)$

* Persamaan garis singgung kurva adalah $y - y_1 = m_{gs}(x - x_1)$

$$\Rightarrow y - (-3) = -2(x - (-2))$$

$$\Rightarrow y + 3 = -2(x + 2)$$

$$\Rightarrow y + 3 = -2x - 4$$

$$\Rightarrow y = -2x - 7$$

d. Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = x^2 - 4x + 2$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 6 = 0$

Jawab: * Garis $x - 2y + 6 = 0$ memiliki gradien $m = \frac{1}{2}$, karena tegak lurus $m_{gs} \cdot m = -1$

maka $m_{gs} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

* $f(x) = x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$

* $m_{gs} = f'(x_1) \Rightarrow -2 = 2x_1 - 4 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

* $y_1 = f(x_1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 1 - 4 + 2 = -1$

* Titik singgungnya $T(1, -1)$

* Persamaan garis singgung kurva adalah $y - y_1 = m_{gs}(x - x_1)$

$$\Rightarrow y - (-1) = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow y + 1 = -2x + 2$$

$$\Rightarrow y = -2x + 1$$

5. Dalil L'Hopital

Jika $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ dimana $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ atau $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ (bentuk tak tentu) maka

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Apabila masih diperoleh bentuk tak tentu, maka masing-masing pembilang dan penyebut diturunkan kembali.

Soal-soal:

a). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$ BTT, maka $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

Diturunkan 2x

b). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4x^4} = \frac{0}{0}$ BTT, mk $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x}{2x - 16x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 4}{2 - 48x^2} = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -\frac{4}{2} = -2$

c). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x^2+4x-2} = \frac{0}{0}$ BTT, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x^2+4x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x+4} = \frac{2}{\infty} = 0$

6. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

a). $f'(x) > 0$ untuk $\forall x$ dalam (a, b) , maka f adalah fungsi naik pada selang (a, b)

b). $f'(x) < 0$ untuk $\forall x$ dalam (a, b) , maka f adalah fungsi turun pada selang (a, b)

c). $f'(x) = 0$ untuk $\forall x$ dalam (a, b) , maka f adalah fungsi konstan pada selang (a, b)

Soal-soal:

a). $f(x) = 9 \Rightarrow f'(x) = 0$, maka $f(x) = 9$ adalah fungsi konstan untuk setiap nilai x .

b). Tentukan interval dimana $f(x)$ naik dan $f(x)$ turun dari fungsi $f(x) = x^2 + 3x - 10$

Jawab: * $f(x) = x^2 + 3x - 10 \Rightarrow f'(x) = 2x + 3$

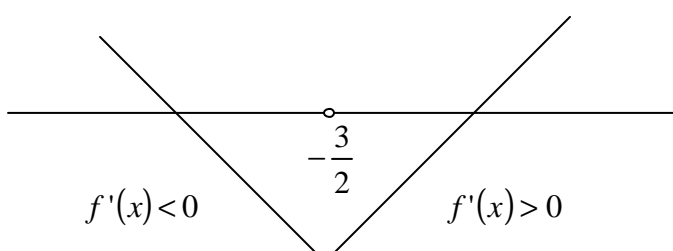
* $f(x)$ naik jika $f'(x) > 0$ maka $2x + 3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$

Jadi $f(x)$ naik pada interval $x > -\frac{3}{2}$

* $f(x)$ turun jika $f'(x) < 0$ maka $2x + 3 < 0 \Rightarrow 2x < -3 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$

Jadi $f(x)$ turun pada interval $x < -\frac{3}{2}$

Ilustrasi Grafik

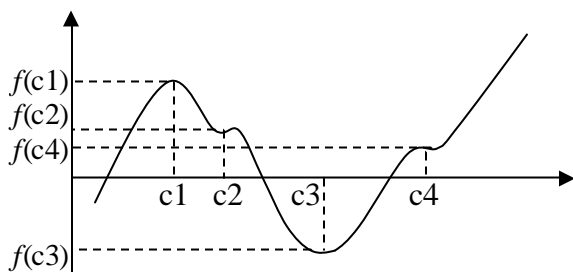


7. Titik Stasioner

Jika fungsi f mempunyai turunan pada selang I yang memuat c . Jika $f'(c) = 0$, maka $T(c, f(c))$ adalah titik stasioner dari fungsi f .

- a). Jika $f''(c) > 0$ maka $T(c, f(c))$ titik Balik Minimum relatif dari fungsi f .
- b). Jika $f''(c) < 0$ maka $T(c, f(c))$ titik Balik Maksimum relatif dari fungsi f .
- c). Jika $f''(c) = 0$ maka $T(c, f(c))$ titik Belok Grafik fungsi f .

Dimana $f'(x)$ adalah turunan pertama $f(x)$ dan $f''(x)$ turunan kedua dari $f(x)$



$T(c_1, f(c_1))$ titik balik maksimum
 $T(c_2, f(c_2))$ titik belok
 $T(c_3, f(c_3))$ titik balik minimum
 $T(c_4, f(c_4))$ titik belok

Soal-soal:

Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Jawab: Diketahui $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ maka $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
 $f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2)$
 $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$

Titik stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 0$ diperoleh $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$

Untuk $x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = 2.1^3 - 9.1^2 + 12.1 = 2 - 9 + 12 = 5$ diperoleh $T_1(1, 5)$

Untuk $x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = 2.2^3 - 9.2^2 + 12.2 = 16 - 36 + 24 = 4$ diperoleh $T_2(2, 4)$

Dengan Turunan Kedua:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \Rightarrow f''(x) = 12x - 18$$

Untuk $x_1 = 1 \Rightarrow f''(1) = 12.1 - 18 = -6 < 0$ maka $T_1(1, 5)$ adalah **Titik Balik Maksimum**.

Untuk $x_2 = 2 \Rightarrow f''(2) = 12.2 - 18 = 6 > 0$ maka $T_2(2, 4)$ adalah **Titik Balik Minimum**.

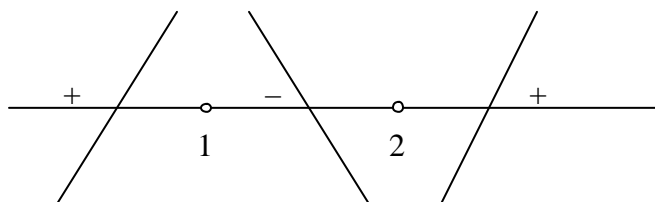
Dengan Diagram Grafik:

Uji nilai:

Untuk $x < 1$ pilih $x = 0$ maka $f'(0) = 6.0^2 - 18.0 + 12 = 12 > 0$, $f(x)$ **Naik**

Untuk $1 < x < 2$ pilih $x = \frac{3}{2}$ maka $f'(\frac{3}{2}) = 6.(\frac{3}{2})^2 - 18.(\frac{3}{2}) + 12 = -1\frac{1}{2} < 0$, $f(x)$ **Turun**

Untuk $x > 2$ pilih $x = 3$ maka $f'(3) = 6.3^2 - 18.3 + 12 = 12 > 0$, $f(x)$ **Naik**



Sehingga

$T_1(1, 5)$ Titik Balik Maksimum.

$T_2(2, 4)$ Titik Balik Minimum.

8. Nilai Stasioner

Jika $T(c, f(c))$ adalah titik stasioner grafik fungsi f , maka $f(c)$ adalah nilai stasioner di titik $x = c$

Soal-soal:

Dari soal di atas, $T_1(1, 5)$ Titik Balik Maksimum. Nilai stasioner di titik $x = 1$ adalah 5.

9. Nilai Maksimum dan Nilai Minimum

Untuk mencari Nilai Maksimum dan Nilai Minimum mutlak fungsi f pada interval tertutup $[a, b]$ dapat dilakukan dengan cara:

- Menentukan nilai stasioner fungsi f dalam interval tersebut.
- Menentukan nilai fungsi $f(a)$ dan $f(b)$
- Menyelidiki nilai maksimum (terbesar) dan minimum (terkecil) pada poin **a).** dan **b).**

Soal-soal:

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ dalam interval $1 \leq x \leq 5$

Jawab:

- a. Nilai stasioner f diperoleh jika $f'(x) = 0$

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow 6 \cdot (x - 2)(x - 3) = 0$$

$x = 2$ atau $x = 3$

Terdapat dua titik stasioner pada interval $1 \leq x \leq 5$

Untuk $x = 2$ maka $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 28$

Untuk $x = 3$ maka $f(3) = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 = 27$

- b. Menentukan nilai $f(1)$ dan $f(5)$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 = 23 \text{ dan } f(5) = 2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 = 55$$

- c. Dari nilai-nilai tersebut dapat kita lihat bahwa nilai maksimumnya adalah 55 dan nilai minimumnya adalah 23.

10. Penerapan Nilai Maksimum dan Minimum dalam Kehidupan Sehari-hari

Kebun Pak Subur berbentuk persegi panjang dengan kelilingnya 60 meter. Jika panjangnya x meter dan lebarnya y meter, tentukan:

- Persamaan yang menyatakan hubungan antara x dan y
- Ukuan kebun Pak Subur agar luasnya maksimum.

Jawab:

- a. Keliling $ABCD = 2(x + y)$

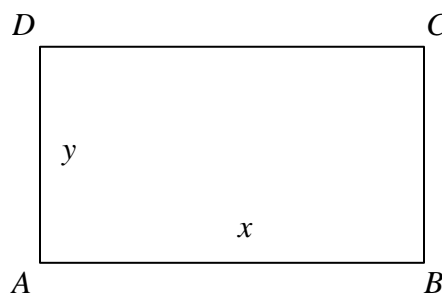
$$\Leftrightarrow 60 = 2(x + y)$$

$$\Leftrightarrow x + y = 30$$

$$\Leftrightarrow y = 30 - x$$

Jelaslah bahwa $y > 0$ untuk $0 \leq x \leq 30$

Jadi $y = 30 - x$ dengan $0 \leq x \leq 30$



- b. $L = x \cdot y$
 $= x(30 - x)$

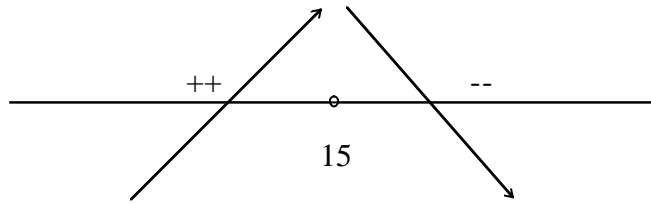
$$L(x) = 30x - x^2$$

Harus dicari nilai maksimum L .

$$L(x) = 30x - x^2 \Rightarrow L'(x) = 30 - 2x$$

Nilai stasioner L didapat jika $L'(x) = 0$. Jadi $L'(x) = 0 \Rightarrow 30 - 2x = 0 \Rightarrow x = 15$

Dengan menguji nilai $L'(x)$ menggunakan garis bilangan, diperoleh



Untuk $x = 15$ terdapat nilai balik maksimum. $L(15) = 30 \cdot 15 - 15^2 = 450 - 225 = 225$
 Nilai L pada ujung-ujung interval $0 \leq x \leq 15$ adalah $L(15) = 225$ dan $L(0) = 0$

Jadi, Luas maksimumnya adalah 225 m^2 , jika segi empat tersebut berbentuk persegi, dengan lebar = panjang = 15 m .

11. Kecepatan dan Percepatan

Jika suatu benda bergerak sepanjang garis lurus, maka berlaku $v = \frac{ds}{dt}$ dan $a = \frac{dv}{dt}$, dimana:

v = kecepatan pada t detik ($\frac{m}{s}$)

s = panjang lintasan dalam t detik (m)

a = percepatan pada t detik ($\frac{m}{s^2}$)

Soal-soal:

Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus dengan panjang lintasan s meter pada waktu t detik, didefinisikan dengan persamaan $s = 5 + 12t - t^3$.

- Tentukan rumus kecepatan saat t detik.
- Tentukan t jika kecepatan sesaatnya nol.
- Tentukan percepatan benda pada saat t detik.
- Hitunglah jarak dan kecepatan sesaat jika percepatannya nol.

Jawab: $s = 5 + 12t - t^3$

a. Kecepatan sesaat = $\frac{ds}{dt} = 12 - 3t^2$

b. Kecepatan sesaat = $12 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow 4 - t^2 = 0 \Leftrightarrow (2-t)(2+t) = 0 \Rightarrow t = \pm 2$ detik
 Jadi, kecepatan sesaatnya nol setelah 2 detik.

c. Percepatan (a) = $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} = -6t$ (turunan kedua dari s terhadap t)

d. $a = -6t \Leftrightarrow 0 = -6t \Leftrightarrow t = 0$ detik

Jarak $s = 5 + 12t - t^3 = 5 + 12 \cdot 0 - 0^3 = 5$ meter

Kecepatan sesaat = $v = 12 - 3t^2 = 12 - 3 \cdot 0^2 = 12 \frac{m}{dt}$

12. Menggambar Kurva (Grafik)

Untuk menggambar grafik fungsi yang dapat dideferensialkan adalah dengan menentukan:

- Titik potong kurva dengan sumbu x dan sumbu y .
- Titik stasioner dan nilai ekstrimnya.
- Garis penunjuk arah kurva.

Soal-soal:

Gambarlah kurva dari fungsi $f(x) = 2x^2 - 8$.

Jawab:

a. $y = f(x) = 2x^2 - 8$ memotong sumbu x jika $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(x-2)(x+2) = 0$
 diperoleh $x = \pm 2$. Jadi $T_1(-2, 0)$ dan $T_2(2, 0)$

$y = f(x) = 2x^2 - 8$ memotong sumbu y jika $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0^2 - 8 = -8$. Jadi $T_3(0, -8)$

b. $f(x) = 2x^2 - 8 \Rightarrow f'(x) = 4x$

Titik stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0$ sehingga diperoleh $4x = 0 \Rightarrow x = 0$

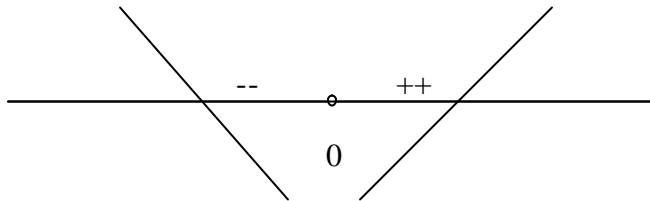
Untuk $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0^2 - 8 = -8$. Jadi titik stasionernya adalah $T(0, -8)$

c. Bentuk grafik

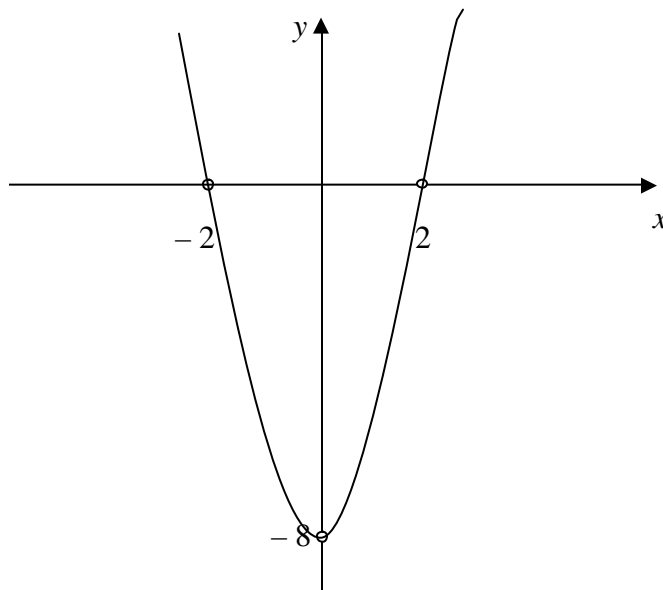
$$f'(x) = 4x$$

Uji titik: Untuk $x = -1$ maka $f'(-1) = 4(-1) = -4 < 0$ **Grafik Turun**

Untuk $x = 1$ maka $f'(1) = 4(1) = 4 > 0$ **Grafik Naik**



d. Sketsa Grafik



Catatan:

a. m dan h dua garis yang sejajar maka $m_g = m_h$

b. m dan h dua garis yang saling tegak lurus maka $m_g \cdot m_h = -1$

c. Persamaan garis adalah $y = mx + c$ (gradien m) atau $ax + by + c = 0$ (gradien $m = -\frac{a}{b}$)

d. Persamaan garis lurus melalui satu titik (x_1, y_1) dengan gradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$

Soal-soal Latihan

==== TURUAAA ====

A. Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut menggunakan definisi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1. $f(x) = -3$

2. $f(x) = -9$

3. $f(x) = 11$

4. $f(x) = 50$

5. $f(x) = \frac{45}{6}$

6. $f(x) = 18x$

7. $f(x) = -10x$

8. $f(x) = 2x$

9. $f(x) = \frac{1}{2}x$

10. $f(x) = 15x$

11. $f(x) = 5x^2$

12. $f(x) = -5x^2$

13. $f(x) = 20x^2$

14. $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

15. $f(x) = 4x^3$

16. $f(x) = -10x^3$

17. $f(x) = -7x^3$

18. $f(x) = \frac{1}{3}x^3$

19. $f(x) = 6\sqrt{x}$

20. $f(x) = -2\sqrt{x}$

21. $f(x) = 5x + 2$

22. $f(x) = 2x - 5$

23. $f(x) = \frac{1}{x}$

24. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

25. $f(x) = x^2 + 2x$

B. Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut dengan menggunakan rumus :

26. $f(x) = x^2$

27. $f(x) = 4x^2$

28. $f(x) = 9x$

29. $f(x) = -11x$

30. $f(x) = \frac{1}{5}x$

31. $f(x) = -\frac{5}{6}x^2$

32. $f(x) = -6x^{10}$

33. $f(x) = 5x^7$

34. $f(x) = \frac{5x^7}{\sqrt{x}}$

35. $f(x) = \frac{-12}{x^2 \sqrt[3]{x^2}}$

36. $f(x) = \frac{5x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

37. $f(x) = 5\sqrt[3]{x}\sqrt{x}$

38. $f(x) = \frac{2}{3x} + \sqrt[3]{x}$

39. $f(x) = \sqrt[5]{x} - 3x^2$

40. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

41. $f(x) = 5x^2 - 6x$

42. $f(x) = 4x + 9x^5 - 2x^3$

43. $f(x) = 3x + 2x^3 - 10$

44. $f(x) = 5 - 4x^6 + 3x^8$

45. $g(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$

46. $g(x) = 3x^{-2} + 2x^{\frac{1}{2}} - x$

47. $g(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

48. $g(x) = \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^7}$

49. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3$

50. $g(x) = \left(4x^{\frac{1}{3}} + x^3\right)^2$

51. $g(x) = (x^2 - 2x)(5x + 3)$

52. $g(x) = (3 - 2x)(2x + 3)$

53. $g(x) = (3x - 1)(4x + 5)$

54. $g(x) = 2x(x^2 + 5)$

55. $g(x) = (x^{-3} + 7x^3 - 8)(2x^{-3} + 4x^2)$

56. $g(x) = (x^2 + 3x)(3x^2 - 4x + 1)$

57. $g(x) = x^2\sqrt{x}(x - 3)$

58. $g(x) = 3\sqrt{2} \cdot x(x^2 + 1)$

59. $g(x) = \frac{(x + 2)}{(x - 1)}$

60. $g(x) = \frac{(x^2 - 2x)}{(x^3 - 1)}$

61. $g(x) = \frac{3x + 8}{5 - 6x}$

62. $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5}$

63. $g(x) = \frac{4x^2 - 3x - 5}{5x - 7}$

64. $g(x) = \frac{4x^3 - 3x^2}{x^5 - 7}$

65. $g(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

66. $g(x) = \frac{2x^2}{1 - x}$

67. $g(x) = \frac{2x^2 + 3}{x - 3x^3}$

68. $g(x) = \frac{x^5}{x^2 - x^3}$

69. $g(x) = \frac{x^5 + 1}{5 - x}$

70. $g(x) = \frac{1 - 2x}{x^4 + x}$

88. $g(x) = \sqrt[3]{1 - 6x^2}$

89. $g(x) = \sqrt[3]{4 + 7x - 8x^2}$

90. $g(x) = \sqrt[3]{(4 - x)^2}$

91. $g(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 4x - 1)^2}$

92. $g(x) = \sqrt[5]{(x - 1)^2}$

93. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{6 - x^2}}$

94. $g(x) = \frac{8}{\sqrt{5x^2 + 2x}}$

95. $g(x) = \frac{7}{\sqrt[3]{3 - x^3}}$

96. $g(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}}$

97. $g(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{1 - 5x + 3x^2 - x^3}}$

98. $g(x) = \left(\frac{5x + 1}{2x - 1}\right)^8$

99. $g(x) = \left(\frac{1 - 3x}{x + 5}\right)^9$

100. $g(x) = \left(\frac{1 - x}{x + 1}\right)^{-4}$

101. $g(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^{-5}$

102. $g(x) = (4x + 3)^3(x + 1)^5$

103. $g(x) = (x - 1)^4(2x + 3)^5$

104. $g(x) = (2x - 5)^{-4}(x + 6)^4$

105. $g(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}}$

106. $g(x) = \frac{2 - x^2}{(4x + x^2)^3}$

107. $g(x) = (x^2 + 6x)^{-\frac{1}{2}}$

108. $g(x) = (3 - 4x^2)^{\frac{1}{3}}$

109. $g(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$

110. $g(x) = \sqrt{\left(4x - \frac{1}{x^2}\right)^3}$

C. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi di bawah ini:

71. $f(x) = (x^2 - 5x)^4$

72. $f(x) = (2x - 3)^4$

73. $f(x) = (4x + 1)^5$

74. $f(x) = (6 - 3x)^3$

75. $f(x) = (x^2 - 6x + 1)^6$

76. $f(x) = (-3x^2 + 4x^3)^6$

77. $f(x) = (4x^2 + 5x - 10)^7$

78. $f(x) = (3x + 5)^{-2}$

79. $f(x) = (2x^2 - x)^3$

80. $f(x) = (x^2 + 6x - 7)^{-5}$

81. $f(x) = (2x^3 - x^2 + 4x)^{-7}$

82. $f(x) = \frac{4}{(2x - 5)^2}$

83. $g(x) = \frac{5}{(4 - 3x)^3}$

84. $g(x) = \frac{-9}{(3x^2 - 5x + 2)^5}$

85. $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$

86. $g(x) = \sqrt{x^4 + 4x^3 - x}$

87. $g(x) = \sqrt{(x^2 + 4)^5}$

D. Tentukan rumus turunan dari fungsi berikut:

111. $h(x) = 2 \sin x$

112. $h(x) = -8 \sin x$

113. $h(x) = \sin 5x$

114. $h(x) = 5 \cos x$
115. $h(x) = -9 \cos x$
116. $h(x) = \cos 8x$
117. $h(x) = 3 \tan x$
118. $h(x) = -4 \tan x$
119. $h(x) = \tan 7x$
120. $f(x) = \sec x$
121. $f(x) = \cos \sec x$
122. $f(x) = \cot x$
123. $h(x) = \sin(x - 3)$
124. $h(x) = \sin(x^2 + 2x)$
125. $h(x) = \sin(2x^3 - 3x^2 + x)$
126. $h(x) = \sin(x^3 - 3x^2)^2$
127. $h(x) = \sin(3x^2 - x)^3$
128. $h(x) = \cos(x + 5)$
129. $h(x) = \cos(x^3 + 3x)$
130. $h(x) = \cos(5x^3 + 3x^2 - 2x)$
131. $h(x) = \cos(2x^2 + 5x)^3$
132. $h(x) = \cos(3x^2 - x)^4$
133. $h(x) = \tan(5 - x)$
134. $h(x) = \tan(x^3 + x)$
135. $h(x) = \tan(5x^3 - 3x^2 - 2x)$
136. $h(x) = \tan(2x^2 + 5x)^2$
137. $h(x) = \tan(3x^2 - 2x)^4$
138. $f(x) = \sin x - \cos x$
139. $f(x) = \sin x + 5 \cos 2x$
140. $f(x) = \cos x - 5 \tan 5x$
141. $f(x) = 2 \tan 3x - \sin 2x$
142. $f(x) = 4x^2 + \sin 6x$
143. $f(x) = x \sin x$
144. $f(x) = x^2 \sin x$
145. $f(x) = (5x + 2) \tan x$
146. $f(x) = (x^2 - 5x) \cos 3x$
147. $f(x) = \sin x \cos x$
148. $f(x) = \sin 3x \cos 3x$
149. $f(x) = \sin 2x \tan(3x - 5)$
150. $f(x) = \cos(2x - 4) \tan(3x - 5)$
151. $f(x) = \sin(x^2 - 3x) \cdot 4 \cos 2x$
152. $f(x) = \sin(x^2 - 3x) \cdot \sin(3x - 2)$
153. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + x}$
154. $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$
155. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
156. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

157. $f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$
158. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$
159. $f(x) = \frac{\sin x}{3 + \cos x}$
160. $f(x) = \frac{2x + 4}{\sin x}$
161. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$
162. $f(x) = \frac{\cos x}{(x^2 + 3x)^3}$
163. $f(x) = \frac{2 + \tan x}{2 - \tan x}$
164. $f(x) = \frac{1 + x^2}{x \sin x}$
165. $f(x) = \frac{\sin x}{1 - 2 \cos x}$
166. $f(x) = \frac{\sin x}{2 \cos 3x}$
167. $g(x) = \sin(\cos x)$
168. $g(x) = \cos(\sin x)$
169. $g(x) = \sin^3 x$
170. $g(x) = 5 \cos^4 x$
171. $g(x) = 3 \tan^5 2x$
172. $g(x) = -3 \sin^4(2x - x^2)$
173. $g(x) = 4 \sin^3(\cos x)$
174. $g(x) = -4 \cos^3(\sin 5x)$
175. $g(x) = 7 \cos^5(\cos(x - 2x^2))$

E. Soal-soal persamaan garis singgung kurva.

Tentukan gradien dan persamaan garis yang menyinggung kurva berikut pada titik yang telah ditentukan

176. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ di titik (1, 5)
177. $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ di titik (2, 1)
178. $f(x) = x^3 + x + 2$ di titik (-1, 0)
179. $f(x) = \frac{4}{x}$ di titik (1, 4)
180. $f(x) = x^2$ di titik (3, 9)
181. $f(x) = \sqrt{x}$ di titik (4, 2)
182. $f(x) = (x - 3)(x^2 + 2)$ di titik (1, -6)
183. $f(x) = 1 - x^2$ di titik (2, 0)
184. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5$ di titik (2, 3)
185. $f(x) = x^2 - 4x - 5$ di titik (-2, 7)
186. $f(x) = \sqrt[3]{5 - x}$ di titik (-3, 2)
187. 1. $f(x) = -\frac{8}{\sqrt{x}}$ di titik (4, -4)

188. $f(x) = x^2 - 7$ di titik (3, 2)
 189. $f(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{x^2}$ di titik (5, 0)
 190. $f(x) = 4x^2 - 16$ di titik (-2, 0)

Tentukan gradien dan persamaan garis singgung kurva-kurva berikut:

191. $f(x) = x^2 - 3$ di $x = 1$
 192. $f(x) = 3x^2 - 2$ di $x = 3$
 193. $f(x) = (x-3)(x+4)$ di $x = -1$
 194. $f(x) = (2x-3)(x+1)$ di $x = 0$
 195. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ di $x = 3$
 196. $f(x) = x^3 + 7x - 4$ di $x = -3$
 197. $f(x) = \frac{1}{x}$ di $x = 3$
 198. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ di $x = -2$
 199. $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}$ di $x = 1$
 200. $f(x) = 3\sqrt{x}$ di $x = 9$

Tentukan gradien dan persamaan garis singgung kurva-kurva berikut:

201. $y = x^3$ di titik berordinat 8.
 202. $y = x^2 + 5x + 5$ di titik berordinat -1.
 203. $y = \frac{4}{x^2}$ di titik berordinat 4
 204. $y = 1 - x^2$ di titik berordinat -15
 205. $y = 3x^2$ di titik berordinat 12
 206. $y = \sqrt{x}$ di titik berordinat 3
 207. $f(x) = x^2 + 5x + 4$, di titik berabsis -3.
 208. $y = x^2 - 5x$ di titik berabsis 5.
 209. $y = x^3 - 3x + 5$ di titik berabsis 1.
 210. $y = 10 - 2x^3$ di titik berabsis 2.
 211. $y = x^2 - 3x + 2$ di titik berabsis 2.

Tentukan persamaan garis singgung kurva:

212. $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ dengan $m = 5$
 213. $f(x) = 3x^2 + 3x + 4$ dengan $m = -3$
 214. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ dengan $m = -2$
 215. $f(x) = x^4 + x + 2$ dengan $m = -3$
 216. $f(x) = x^2 - x + 3$ dengan $m = 1$
 217. $f(x) = 5 + 3x - 2x^2$ dengan $m = -3$
 218. $f(x) = (x-1)(x+1)$ dengan $m = 2$
 219. $f(x) = (x+3)(x-5)$ dengan $m = 0$
 220. $f(x) = x^3 + x^2$ dengan $m = 1$

221. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 7x + 1$, $m = -1$
 222. $f(x) = x^3$, dengan $m = -1$
 223. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, dengan $m = -3$
 224. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, dengan $m = 1/4$
 225. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, dengan $m = 4$
 226. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ yang sejajar garis
 $2x - 6y + 4 = 0$
 227. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 10x$ yang sejajar garis
 $y = 2x$
 228. $f(x) = x^2 - 3x$ yang sejajar garis
 $y = 2x + 7$
 229. $f(x) = 2x^2 + 3$ yang sejajar garis
 $8x - y + 3 = 0$
 230. $f(x) = 3x^2 - 4x$ yang sejajar garis
 $2x - y + 3 = 0$
 231. $f(x) = \frac{4}{x}$ yang sejajar garis $y = -x + 5$
 232. $f(x) = 3 - x - x^2$ yang sejajar garis
 $y = -x + 5$
 233. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{x}$ yang sejajar sumbu x .
 234. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ yang sejajar garis
 $y = 3x - 5$.
 235. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ yang sejajar sumbu x .
 236. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ yang tegak lurus
 terhadap garis $y = x$
 237. $f(x) = \sqrt{4x-3}$ yang tegak lurus garis
 $x + 2y - 11 = 0$
 238. $f(x) = 4x - x^2$ yang tegak lurus garis
 $y = -\frac{1}{2}x + 4$
 239. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 5$ yang tegak lurus
 garis $x - 4y + 1 = 0$
 240. $f(x) = x^4 - 6x$ yang tegak lurus garis
 $x - 2y + 6 = 0$
 241. $f(x) = (7x - 6)^{\frac{1}{3}}$ yang tegak lurus garis
 $48x - 7y + 2 = 0$
 242. $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ yang tegak lurus garis
 $y = -\frac{1}{3}x - 9$
 243. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ yang tegak lurus garis
 $4y + x = 2$

244. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 18x + 3$ yang tegak lurus garis $9y + x + 2 = 0$
245. $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ yang tegak lurus garis $2y + x + 3 = 0$
246. $f(x) = x^2 - 2x + 6$ yang tegak lurus garis $x - 3y + 2 = 0$

Soal-soal Lainnya:

247. Garis yang menyinggung kurva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 48x - 6$ di titik $(2, -2)$ juga menyinggung kurva $f(x) = x^2 - 2x$ di titik P. Tentukan koordinat titik P!
248. Garis yang menyinggung kurva $f(x) = x^4$ di titik $(1, 1)$ juga menyinggung kurva $f(x) = x^2 + 2x + k$ di titik P. Tentukan koordinat titik P dan nilai k .
249. Tentukan nilai k jika garis $y = 6x + 5$ menyinggung kurva $f(x) = x^2 + 2x + k$.
250. Tentukan nilai k jika garis $y = 2x + k$ menyinggung kurva $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 4$.
251. Kurva $f(x) = x^3 - 3x^2$ memotong sumbu Y positif di titik P. Tentukan persamaan garis yang menyinggung kurva $f(x) = x^3 - 3x^2$ di titik P.
252. Kurva $f(x) = x^2 + 2x + 2$ memotong sumbu Y di titik P. Tentukan persamaan garis yang menyinggung kurva $f(x) = x^2 + 2x + 2$ di titik P.
253. Kurva $f(x) = x^2 - 2x - 3$ memotong sumbu X positif di titik P. Tentukan persamaan garis yang menyinggung kurva $f(x) = x^2 - 2x - 3$ di titik P.
254. Kurva $f(x) = \left(a + \frac{b}{x}\right)\sqrt{x}$ melalui titik $P(4, 8)$, gradien garis singgung di P adalah 2. Tentukan a dan b .
255. Garis k tegak lurus garis $3y - x + 3 = 0$ dan menyinggung kurva $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ di Q. Tentukan titik Q.
256. Jika titik P mempunyai absis dan ordinat sama, maka tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ di P.
257. Garis singgung titik Q pada kurva $f(x) = 2x^2 - x + 7$ sejajar garis $2x - y + 1 = 0$. Tentukanlah koordinat titik Q.
258. Tentukan nilai a dan b , jika garis singgung kurva $y = ax^2 + bx$ melalui titik $(1, 5)$ dan bergradien 8.
259. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2$ yang sejajar dengan garis yang memotong kurva tersebut di $x = -1$ dan $x = 4$.
260. Suatu kurva mempunyai persamaan $y = x^2 + px + q$ dengan p dan q konstan. Jika garis $y = 2x$ menyinggung kurva di titik $(4, 2)$, tentukanlah nilai p dan q .
261. Buktikanlah bahwa gradien garis singgung kurva $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ tidak pernah negatif. Tentukanlah titik-titik pada kurva tersebut sehingga garis singgung di titik itu mempunyai gradien nol.
262. Tunjukkan bahwa kedua garis singgung kurva $y = x^3$ pada titik dengan $x = 1$ dan pada titik dengan $x = -1$ adalah sejajar. Tentukan koordinat titik-titik potong kedua garis singgung itu dengan sumbu X dan sumbu Y.
263. Buktikan bahwa tidak ada garis yang melalui titik $(1, 2)$ merupakan garis singgung kurva $y = 4 - x^2$.
264. Kurva $y = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ memotong sumbu X di titik-titik $P(2,0)$, $Q(3,0)$ dan $R(4,0)$. Buktikan bahwa gradien pada P dan R sama, dan tentukan persamaan garis singgung di titik Q.
265. Tentukan koordinat suatu titik pada kurva $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$ yang gradiennya sama dengan gradien garis $4x - y = 0$.
266. Garis singgung di A pada $y = x^2 + 4x - 16$ sejajar garis $3x - y = 2$. Tentukan koordinat titik A.
267. Jika garis singgung pada kurva $y^2 = 6x$ di titik P membentuk sudut 45° dengan sumbu X positif, tentukan koordinat titik P.
268. Tentukan persamaan garis singgung terhadap kurva fungsi $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ pada titik yang absisnya merupakan titik potong kurva dengan sumbu X.
269. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - 3x^2 - 8x + 16$ yang membuat sudut 45° terhadap sumbu X positif.
270. Tentukan titik-titik singgung pada kurva $y = 2x^2 + 3x - 4$ dan persamaan garis singgung kurva tersebut, sehingga garis singgung kurva di titik itu membentuk sudut 135° dengan sumbu X positif.
271. Tentukan persamaan garis singgung kurva di titik $K\left(\frac{p}{6}, \frac{1}{2}\right)$ pada kurva $f(x) = \sin x$.

272. Tunjukkan bahwa tidak ada garis yang melalui titik (1, 2) merupakan garis singgung kurva $y = 4 - x^2$

F. Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi-fungsi berikut:

273. $f(x) = x^2$
 274. $f(x) = 3x^2$
 275. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
 276. $f(x) = x^2 + 6x$
 277. $f(x) = x - x^2$
 278. $f(x) = 3x - 2x^2$
 279. $f(x) = 3x - x^3$
 280. $f(x) = 3x^2 + 12x$
 281. $f(x) = x^2 - 4x + 5$
 282. $f(x) = x^3 - 2$
 283. $f(x) = x^3 - 3x^2$
 284. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$
 285. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
 286. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$
 287. $f(x) = x^2 - 12x + 5$
 288. $f(x) = (x - 2)^2$
 289. $f(x) = (2x + 4)^2$
 290. $f(x) = x(x - 3)^2$
 291. $f(x) = x(x - 2)^3$
 292. $f(x) = (x - 1)(x^2 + 7x - 29)$
 293. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$
 294. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$
 295. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x$
 296. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$
 297. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$
 298. $f(x) = 1 + x - x^2 - x^3$
 299. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$
 300. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
 301. $f(x) = x^4 + 4x$
 302. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$
 303. $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 6$
 304. $f(x) = \frac{1}{x}$
 305. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$
 306. $f(x) = \frac{x}{x+1}, x \neq -1$
 307. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{1 - 2x}$

308. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$

309. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$

310. $f(x) = \frac{6}{(x - 2)^2}$

311. $f(x) = \sin x; 0 \leq x \leq 2\pi$

312. $f(x) = \cos x + \sin x; 0 \leq x \leq 2\pi$

Untuk setiap fungsi berikut, nyatakan apakah fungsinya naik atau turun.

313. $f(x) = 2x^2 - 11$ pada $x = 3$

314. $f(x) = x^2 - 2x^3$ pada $x = -1$

315. $f(x) = x^6 + 4x^3 + 9$ pada $x = 1$

Lainnya:

316. Tunjukkan secara aljabar bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ tidak pernah turun.

317. Tunjukkan bahwa grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$ tidak pernah turun.

318. Tunjukkan bahwa grafik fungsi $f(x) = 2 - 15x + 6x^2 - x^3$ selalu turun.

319. Tunjukkan bahwa grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x$ selalu naik.

320. Tunjukkan secara aljabar bahwa fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x$ selalu turun.

321. Tunjukkan bahwa grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ selalu naik untuk semua x bilangan real.

322. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x + \sin x$ tidak pernah turun.

323. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = -3x + \sin x$ selalu turun.

324. Tunjukkan bahwa grafik fungsi $f(x) = 2x + \cos x$ selalu naik untuk semua x bilangan real.

325. Jika $f(x) = x^3 + px^2 + px + 6$ selalu naik untuk setiap nilai x , maka tentukan nilai p .

326. Jika $f(x) = -px^3 + 2px^2 + 4x - 8$ selalu turun untuk setiap nilai x , maka tentukan nilai p .

327. Jika grafik fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hanya turun pada interval $-5 \leq x \leq 3$, maka nilai $a + b = \dots$

G. Nilai Maksimum dan Minimum

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi-fungsi berikut untuk interval yang diberikan:

328. $f(x) = 2x^2$ pada $-2 \leq x \leq 2$.
329. $f(x) = x^2 - 16$ pd $-2 \leq x \leq 2$.
330. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ pada $2 \leq x \leq 4$.
331. $f(x) = x^2 - 6x + 3$ pada $-1 \leq x \leq 2$.
332. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ pd $0 \leq x \leq 3$.
333. $f(x) = x - x^3 - 6x^2$ pada $-1 \leq x \leq 3$.
334. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ pd $1 \leq x \leq 5$.
335. $f(x) = x(6-x)$ pada $-4 \leq x \leq 2$.
336. $f(x) = (x+2)(x-5)$ pada $2 \leq x \leq 4$.
337. $f(x) = \sqrt{100-x^2}$ pada $-6 \leq x \leq 8$
338. $f(x) = (x-1)^3$ pada $-1 \leq x \leq 4$.
339. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 6$ pd $-2 \leq x \leq 4$.
340. $f(x) = 2x^4 - x^2$ pd $-3 \leq x \leq 4$.
341. $f(x) = \sin x + \cos x$ pd $-2p \leq x \leq 2p$.

H. Titik Stasioner.

Carilah titik balik dan jenisnya dari fungsi-fungsi berikut:

342. $f(x) = -2x^2$
343. $f(x) = x^5$
344. $f(x) = x^2 + 5x - 6$
345. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
346. $f(x) = x^5 - 5x + 3$
347. $f(x) = x^3(4-x)$
348. $f(x) = x^4 - 4x^3$
349. $f(x) = (x-1)^4$
350. $f(x) = (x+1)(x-5)$
351. $f(x) = (x-3)^3(x+2)^4$
352. $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$
353. $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}; x \neq 0$
354. $f(x) = \frac{x}{x^3 + 4}$
355. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$
356. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
357. $f(x) = x + \sqrt{1-x}$
358. $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$
359. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5$
360. $f(x) = 3 + 24x - 21x^2 - 4x^3$
361. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 1$

362. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 3$
363. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$
364. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12$
365. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

Soal lainnya:

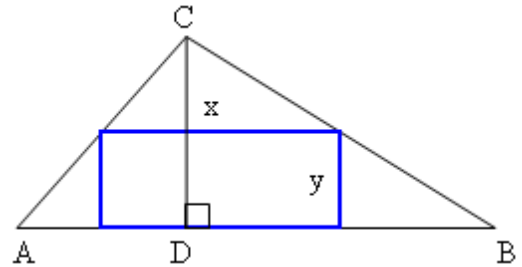
366. Fungsi $f(x) = ax^3 + bx^2$ memiliki titik stasioner $(1, -1)$. Tentukan nilai a dan b .
367. Jika absis stasioner dari $f(x) = x^3 - px^2 - px - 1$ adalah $x = p$, tentukan nilai p yang mungkin!
368. Diketahui $f(x) = x^2 - 4x + a$ mempunyai ekstrim -6. Tentukan jenis ekstrim dari fungsi $f(x) = ax^2 - 2ax + 1$.

I. Aplikasi Turunan, Nilai Maksimum/Minimum, Nilai Stasioner.

369. Tinggi silinder adalah dua kali jari-jari alasnya. Jika jari-jarinya berkurang dengan laju 0,1 cm/s, laju perubahan volume dari silinder ketika jari-jarinya 5 cm adalah....
370. Jumlah dua bilangan adalah 18. Tentukan kedua bilangan itu agar menghasilkan perkalian yang terbesar.
371. Jumlah dua bilangan adalah 16. Tentukan kedua bilangan itu agar menghasilkan perkalian yang terbesar.
372. Jumlah dua bilangan positif sama dengan 10. Tentukan kedua bilangan itu agar menghasilkan perkalian yang terbesar.
373. Tentukan dua bilangan yang hasil kalinya 12 dan jumlah kuadratnya minimal.
374. Jumlah dua bilangan asli adalah 150. Tentukan hasil kali terbesar antara bilangan yang satu dengan kuadrat bilangan yang lainnya.
375. Jika x dan y merupakan bilangan positif yang jumlahnya 48, tentukan nilai xy^2 agar maksimum.
376. Jika x dan y merupakan bilangan positif yang jumlahnya 36, tentukan nilai x^2y terbesar dan terkecil.
377. Jika a dan b bilangan real sedemikian sehingga jumlahnya 8, tentukan nilai $a^3 + b^3$ terbesar dan terkecil.
378. Luas permukaan kotak tanpa tutup dengan alas persegi adalah 108 cm^2 . Tentukan ukuran-ukuran kotak agar volumenya maksimum.
379. Sebuah perusahaan akan membuat kontainer tertutup yang berbentuk balok yang alasnya persegi dengan volum 2.000

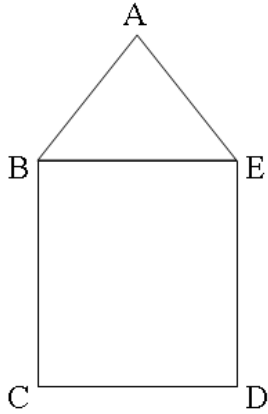
- m^3 . Tentukan ukurannya agar volumenya maksimum.
380. Tentukan jarak terdekat titik $(8, 2)$ terhadap parabola $y = x^2$.
381. Sebuah perusahaan susu akan membuat kaleng susu yang berbentuk tabung tertutup dari bahan logam dengan volume 8 cm^3 . Tentukan ukuran kaleng agar luas bahan yang dibutuhkan seminimal mungkin.
382. Carilah ukuran persegi panjang dengan keliling 100 meter, agar luasnya maksimum.
383. Luas sebuah kotak tanpa tutup yang alasnya persegi adalah 432 cm^2 . Agar volum kotak tersebut mencapai maksimum, tentukanlah panjang rusuk persegi itu.
384. Yudha akan membuat sebuah kotak tanpa tutup atas dengan tinggi kotak sama dengan dua kali salah satu sisi alasnya. Jika volume kotak harus 400 cm^3 , tentukan ukuran kotak agar bahan yang dibutuhkan sesedikit mungkin.
385. Volume sebuah kotak yang alasnya persegi adalah 2 liter. Biaya pembuatan per satuan luas bidang alas dan atas kotak adalah dua kali biaya pembuatan bidang sisinya. Biaya pembuatan yang minimum tercapai jika luas permukaan kotak adalah...
386. Sebuah bak air tanpa tutup dibuat dengan alas berbentuk persegi. Jumlah luas keempat dinding dan alasnya 27 m^2 . Volume terbesar diperoleh jika luas alasnya.....
387. Suatu kotak terbuka dengan alas persegi berisi x cm dibuat dari selembar kertas yang luasnya 75 cm^2 . Tunjukkan bahwa volume, $V \text{ cm}^3$, diberikan oleh $V = \frac{1}{4}(75x - x^3)$. Tentukan nilai x yang menyebabkan V maksimum dan tentukan nilai maksimumnya.
388. Diketahui secarik kertas yang luasnya 2 m^2 . Garis tepi atas, bawah dan sisinya berturut-turut 21 cm, 21 cm, dan 14 cm. Berapa ukuran poster jika luas bagian yang dicetak harus maksimum?
389. Tentukan jari-jari kerucut dengan volume maksimum yang dapat dimasukkan ke dalam sebuah bola berjari-jari r .
390. Tentukan ukuran kerucut dengan volume terkecil yang dapat dilingkupkan di sekeliling bola dengan jari-jari 20 cm.

391. Dian membuat suatu silinder yang berkapasitas 1.000 cm^3 . Tentukan ukuran tanung itu (tanpa tutup atas) agar bahan yang dipakai minimum.
392. Cari dua buah bilangan positif dengan hasil kalinya 12 dan jumlah kuadratnya minimum.
393. Bilangan 120 dibagi menjadi dua bagian sehingga perkalian satu bagian dengan kuadrat bagian lainnya maksimum. Tentukan bilangan-bilangan itu.
394. Jika $AB = 12$ dan $CD = 6$, tentukan x dan y agar luas persegi panjang maksimum.

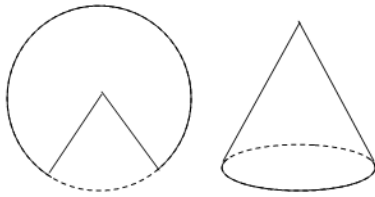


395. Sebuah persegi panjang yang mempunyai lebar $(8 - x)$ cm dan memiliki keliling $(2x + 24)$ cm. Agar luasnya maksimum tentukanlah panjangnya.
396. Suatu perusahaan menghasilkan produk yang dapat diselesaikan dalam x jam, dengan biaya per jam $\left(4x - 800 + \frac{120}{x}\right)$ ratus ribu rupiah. Agar biaya yang dikeluarkan minimum, dalam waktu berapa jamkah produk tersebut harus diselesaikan?
397. Seekor semut merayap dalam bidang XOY. Pada saat t ia berada di titik $(x(t), y(t))$ dengan $x(t) = t^2$ dan $y(t) = t^2 - 4t + 5$. Tentukan jarak semut itu dari sumbu Y agar jarak semut ke sumbu X maksimum.
398. Sebuah prisma tegak yang alasnya berbentuk segitiga siku-siku sama kaki memiliki volume $4(2 - \sqrt{2})\text{m}^3$. Jika prisma itu dibuat sehingga luas seluruh permukaannya sekecil mungkin, tentukanlah luas alasnya.
399. Selembar seng yang panjangnya p meter mempunyai lebar 64 cm. Kedua sisi panjangnya harus dilipat ke atas untuk membuat talang. Dengan memisalkan lebar lipatan pada tiap sisi adalah x , tentukan: a). Kapasitas talang dalam x , b). Lebar lipatan tiap sisi agar kapasitas maksimum, c). Kapasitas maksimum jika panjang seng adalah 3 m.
400. Segitiga ABE merupakan segitiga sama sisi serta BCDE merupakan persegi panjang. Jika keliling bangun tersebut 18

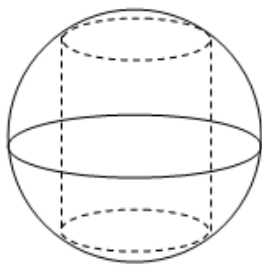
cm, tentukan ukuran bangun tersebut agar luasnya maksimum.



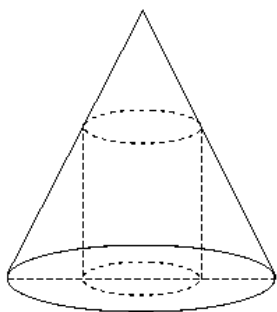
401. Sebuah lingkaran berjari-jari R dipotong sebagian sehingga menjadi juring seperti pada gambar. Juring tersebut akan dibentuk sebuah kerucut, tentukan volume maksimum kerucut yang terjadi.



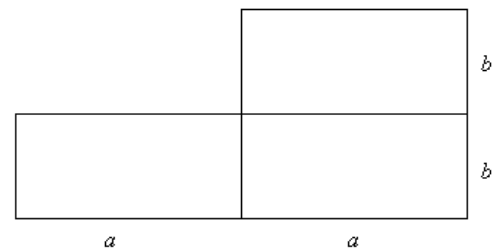
402. Sebuah tabung akan dibentuk di dalam sebuah bola yang berjari-jari R sedemikian sehingga tepi alas dan tepi atasnya menyinggung sisi dalam bola. Hitunglah volume maksimum tabung yang terjadi.



403. Sebuah tabung akan dibentuk di dalam sebuah kerucut sedemikian sehingga alasnya berimpit dengan alas kerucut dan bidang atasnya menyinggung apotema kerucut. Buktikan bahwa volume maksimum tabung yang terjadi besarnya $\frac{4}{9}$ volume kerucut.



404. Sepetak tanah berbentuk persegi panjang yang luasnya 64 m^2 . Berapakah ukuran dari sepetak tanah tersebut agar dapat dipagari dengan bahan sehemat mungkin?
405. Selambar karton dengan luas 24 cm^2 yang berbentuk persegi panjang, ujung-ujungnya dipotong berbentuk bujursangkar yang ukurannya sama. Sisi-sisi karton tersebut dilipat ke atas sehingga diperoleh sebuah kotak tanpa tutup. Tentukan volume paling besar dari kotak yang dapat dibuat dari karton tersebut.
406. Sepotong kawat yang panjangnya 16 cm dipotong menjadi dua bagian. Satu potong dilipat menjadi bujur sangkar dan sisanya dilipat untuk dijadikan lingkaran. Pada bagian manakah kawat tadi harus dipotong supaya jumlah luas bujur sangkar dan lingkaran sesempit mungkin?
407. Sepotong kawat yang panjangnya 16 cm dipotong menjadi dua bagian. Satu bagian sepanjang $8x \text{ cm}$ dibengkokkan dan dibuat persegi panjang dengan ukuran $3x \text{ cm} \times x \text{ cm}$. Bagian lainnya dibengkokkan dan dibuat persegi. Tentukan luas minimum gabungan persegi panjang dan persegi tersebut.
408. Sebuah kawat yang panjangnya 10 meter akan dibuat bangun yang berbentuk 3 persegi panjang seperti pada gambar. Tentukan luas maksimum daerah yang dibatasi kawat tersebut.



409. Satu lembar karton berbentuk persegi panjang dengan ukuran $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ akan dibuat kardus yang berbentuk balok tanpa tutup dengan cara memotong tiap sudutnya sepanjang $x \text{ cm}$. Tentukan tinggi kardus agar volumenya maksimal.

J. Menggambar Grafik

Gambarlah grafik dari fungsi berikut:

410. $f(x) = x^2$
 411. $f(x) = x^3$
 412. $f(x) = 5x^2$
 413. $f(x) = 2x^2 + 8x$
 414. $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$

415. $f(x) = 6 + 6x - x^2$
 416. $f(x) = x^4 - 4x^3$
 417. $f(x) = 3x^4 + 8x^2 + 3x + 4$
 418. $f(x) = x(x-3)^2$
 419. $f(x) = (2x+1)(x-1)^2$
 420. $f(x) = x^2 + 5x - 6$
 421. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
 422. $f(x) = (x+1)(x-5)$
 423. $f(x) = 8 - x^3$
 424. $f(x) = 3x - x^3$
 425. $f(x) = 3x^2 - x^3$
 426. $f(x) = x^3 - 9x$
 427. Silakan mengambil dari **F** dan **H**.

Kata-kata mutiara:

- Where there is a will, there is a way, Dimana ada kemauan, disitu pasti ada jalan.
- Practise makes perfect, banyak latihan kuncine kesuksesan.
- Witing tresno jalaran soko kulino, witing iso jalaran soko kerep nyobo.
- Kalau orang lain bisa, kita InsyaAllah juga bisa.
- Gagal adalah kesuksesan yang tertunda, maju teruuuss...

Sumber:

- Matematika SMA XI, Erlangga, BK Noormandiri.
- Cerdas Belajar Matematika, Grafindo, Marthen Kanginan.
- Matematika SMA/MA XI, Gelora Aksara Pratama, Sulistiyono, dkk.
- Mathematics Year XI, Yudhistira, Team.
- Matematika Bilingual, Yrama Widya, Suwah S dkk
- Matematika unt SMA/MA XI, Piranti, Yanti M dkk.
- Lainnya.

Soal-soal Spesial:

- Tentukan turunan dari $f(x) = \left(1 + \frac{x}{1 + \sqrt{x}}\right)$
- Tentukan turunan dari $f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}}$
- Jika $y = \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{a}{x}}$, buktikan bahwa $(2xy) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right)$

www.matikzone.co.cc
www.matikzone.wordpress.com

