Turunan Fungsi Eksponen

Untuk fungsi eksponen $f(x) = e^x$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \qquad \text{...} \; (1)
\end{aligned}
$$

Pandanglah bentuk

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{h\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \qquad \text{................................}(2)$$

misalkan ln $(1+x) = y \Rightarrow 1 + x = e^y \Rightarrow x = e^y - 1$

jika $x \to 0, y \to 0$, sehingga dari (2) diperoleh

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1 \;\; \text{sehingga} \;\; \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1, \;\; \text{berarti} \;\; \lim_{h\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

dengan demikian persamaan (1) menjadi

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \cdot 1 \\
&= e^x
\end{aligned}
$$

Jadi, jika $f(x) = e^x$ maka turunannya $f'(x) = e^x$.

Turunan Fungsi Eksponen $f(x) = e^{ax+b}$.

Berdasarkan aturan rantai $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ atau $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ dan $u = ax + b$ maka

- $f(x) = e^u \Rightarrow f'(u) = \frac{df}{du} = e^u$
- $u = ax + b \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = a$
- $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot a = ae^u = ae^{ax+b}$

jadi, jika $f(x) = e^{ax+b}$ maka $f'(x) = ae^{ax+b}$

dengan cara yang sama akan kita peroleh:

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$$

Catatan:
e adalah suatu limit yang didefinisikan sebagai:

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Nilainya = 2, 718281824459...