Turunan Fungsi Logaritma

$f(x) = \log x$ disebut fungsi logaritma. Turunan fungsi $f(x) = \log x$ adalah:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}; \quad \text{kalikan dengan } \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x}{x} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

misalkan $\frac{x}{h} = n$, karena $h \to 0$ maka $\frac{x}{h} = n \to \infty$ dan $\frac{h}{x} = \frac{1}{n}$

jadi,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

karena $n \to \infty$, maka limit tersebut sama dengan: $\frac{1}{x} \cdot \log e$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log e$$

$$\therefore \; f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log e$$

Turunan Fungsi Logaritma $f(x) = \log(ax+b)$.

Berdasarkan aturan rantai $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ atau $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ dan $u = ax+b$ maka

- $f(x) = \log u \Rightarrow f'(u) = \frac{df}{du} = \frac{1}{u} \log e$
- $u = ax+b \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = a$
- $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \log e \cdot a = \frac{a}{ax+b} \log e$

jadi, jika $f(x) = \log(ax+b)$ maka $f'(x) = \frac{a}{ax+b} \log e$

dengan cara yang sama akan kita peroleh:

$$f(x) = \log(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \log e$$

demikian juga:

$$f(x) = {}^{P}\log(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot {}^{P}\log e$$

Catatan:
e adalah suatu limit yang didefinisikan sebagai:

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Nilainya = 2, 718281824459...